Università di Trieste – Corso di laurea in matematica

Esercizi sulle successioni e serie di funzioni

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si studi il carattere delle seguenti serie di numeri complessi:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{\log(\tfrac{4}{3})}+i\sqrt{\log(\tfrac{3}{2})}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n}\left(\cos\tfrac{1}{n}+i\sin\tfrac{1}{n}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+i\,n^2\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\sqrt{n}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+i}{3^n-ni}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(4+3i)^n}{5^n+n^2i}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+i^{2n}\cdot\sqrt{n+1}}{n}$

(Sol. a) converge assolutamente b) non converge, c) converge assolutamente, d) converge assolutamente, e) non converge, f) converge semplicemente)

Esercizio 2 Rispondere alle seguenti questioni:

a) Si verifichi che se la funzione f è limite uniforme della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora f è pure limite puntuale della successione.

b) Si provi che la successione di funzioni $(f_n)_n$ dove $f_n(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ è definita da $f_n(x)=x^n$ non ammette limite uniforme per $n\to+\infty$.

Esercizio 3

a) Si calcoli il limite puntuale della successione di funzioni $(f_n)_n$ dove $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è definita da $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

b) Detto $f(x)$ tale limite si verifichi che f_n non converge uniformemente a f per $n\to+\infty$. (Fissato $\epsilon>0$, per esempio si prenda $0<\epsilon<e-2$, deve essere $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$ per ogni $n\geq N_\epsilon$ e per ogni x. In particolare si può prendere $x=n$ e si giunge ad una contraddizione).

Esercizio 4 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(3^n x)}{2^n}.$$

a) Si verifichi che la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$.
b) Si verifichi che la serie delle derivate non converge su $\mathbb{R}$.

Esercizio 5 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}.$$

a) Si verifichi che per la serie assegnata non è possibile applicare il test di Weierstrass.

b) Si verifichi che la serie converge uniformemente.

Esercizio 6 Si consideri la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}.$$

a) Si verifichi che la serie converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $[\varepsilon, +\infty[$, con $\varepsilon > 0$.

b) Si verifichi che $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è continua e derivabile.

Esercizio 7 Supponiamo di sapere che la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+1)^n$ converge semplicemente (non assolutamente) nel punto $x = -3$. Può la serie convergere nel punto $x = 2$?

Esercizio 8 Si calcoli il raggio di convergenza e si studi il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza delle serie seguenti:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{\sqrt{n+1}}$. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}} x^n$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n$. d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (x-4)^n$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}\ 2^n} x^n$. f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{e^n} (x-e)^n$.

g) (Si calcoli solo il raggio di convergenza) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$ con $k \in \mathbb{N}^+$.

(Sol. a) $E =]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$, b) $E =]-1, 1[$, c) $E =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, d) $E =]2, 6[$, e) $E =]-2, 2]$, f) $E =]0, 2e[$, g) $\rho = k^k$.)

Esercizio 9

a) Si calcoli la somma di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - n)\ x^n$.

b) Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ usando il teorema di integrazione.

c) Si calcoli la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1}\ x^n$.

d) Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

e) Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$ distinguendo i casi $x > 0, x = 0, x < 0$.

(Sol. a) $\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$, b) $\dfrac{1}{2x}\log(\dfrac{1+x}{1-x})$ per $|x| < 1$, $x \neq 0$, 1 se $x = 0$, c) $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{\log(1-x)}{x}$ per $|x| < 1$, 2 se $x = 0$ d) $\dfrac{1}{x}\mathrm{arctg}\, x$ per $|x| < 1$, $x \neq 0$, 1 se $x = 0$, e) se $x < 0$ si ha $x = -(\sqrt{-x})^2$ e posso usare l'esercizio d): $\dfrac{1}{\sqrt{-x}}\mathrm{arctg}\,\sqrt{-x}$ per $x > -1$; 1 se $x = 0$; se $x > 0$ si ha $x = (\sqrt{x})^2$ e posso usare l'esercizio b): $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\log(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}})$ per $x < 1$.)

Esercizio 10 Si dimostri il seguente criterio di sviluppabilità. Sia $h > 0$, e sia $I =]x_0 - h, x_0 + h[\subset \mathbb{R}$. Supponiamo che esista una costante $M > 0$ tale che $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M\dfrac{n!}{h^n}$ per ogni n e per ogni $x \in I$. Allora la funzione f è sviluppabile in serie di Taylor in x_0.

Esercizio 11 Si rappresenti in serie di Taylor di centro 0 la funzione $e^x - \dfrac{1}{1-x}$ e se ne calcoli il raggio di convergenza.

(Sol. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-n!}{n!}x^n$, $\rho = 1$.)

Esercizio 12 Si verifichi che $\cos\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}$ e $\sin\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}$.

(Sol. Si usi la formula di Eulero.)

Esercizio 13 Si calcoli una primitiva della funzione

$$f(x) = e^{(x^k)}$$

dove $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, rappresentandola in serie.

(Sol. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{nk+1}}{n!(nk+1)}$.)

Esercizio 14 Mediante lo sviluppo in serie della funzione

$$f(x) = e^{(x^2)}$$

si calcolino nel punto $x = 0$ le derivate di ogni ordine $f^{(n)}(0)$.

(Sol. Confrontando i coefficienti dello sviluppo in serie della funzione e della sua serie di Taylor si ottiene $f^{(2n)}(0) = (n+1)(n+2)\cdots(2n)$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$.)

Esercizio 15 Calcolare (esprimendo il risultato in serie numerica)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(t^2)}{t^2}\, dt.$$

(Sol. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)2^{4n+1}}$.)

Esercizio 16 Si risolva l'equazione $\dfrac{1+x}{1-x} = 3$. Si usi tale soluzione per rappresentare il numero $\log 3$ come serie di potenze.

(Sol. $y = \frac{1}{2}$; $\log(1+\frac{1}{2}) - \log(1-\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1/2)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}$.)