

## Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

### Laurea in ingegneria logistica e della produzione Laurea in ingegneria dei materiali (materie plastiche)

Corso di Analisi Matematica 2

Anno Accademico 2001/2002

Dott. Franco Obersnel

#### Serie numeriche

Il concetto di somma infinita. Serie geometrica di ragione  $x \in \mathbb{R}$ . La formula  $\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ . Serie di numeri reali. Carattere di una serie. Termine generale di una serie. Ridotta  $n$ -esima di una serie. Serie convergente, divergente, indeterminata. Condizione necessaria (non sufficiente) per la convergenza di una serie. Il carattere di una serie non viene modificato modificando un numero finito di termini. Serie somma di due serie. Serie di Mengoli  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ . Serie armonica. Aut aut per le serie a termini di segno costante. Criteri del confronto, del rapporto e della radice per le serie a termini positivi. Serie armonica generalizzata. La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ . Se per una serie è applicabile il criterio del rapporto, allora il termine generale della serie è un infinitesimo soprareale. Serie a termini di segno misto. Serie assolutamente convergenti e serie semplicemente convergenti. Una serie assolutamente convergente è convergente. L'esempio della serie di Leibniz. Lemma sulle ridotte pari e dispari. Criterio di convergenza di Leibniz per le serie a termini di segno alterno.

#### Serie di funzioni e serie di potenze

Successioni e serie di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale (non viceversa). La continuità passa al limite nella convergenza uniforme. Il problema della sviluppabilità. Serie di Taylor e serie di Fourier (solo definizione).

Serie di potenze. Insieme, intervallo e raggio di convergenza di una serie di potenze. Teorema sul comportamento di una serie di potenze dentro e fuori all'intervallo di convergenza. Derivazione e integrazione di serie (solo en.). Funzioni analitiche.

Sviluppabilità in serie di Taylor. Criteri di sviluppabilità. Esempi notevoli: esponenziale, funzioni circolari, funzioni iperboliche, serie binomiale, logaritmo, funzioni circolari inverse. Determinazione numerica di  $\log(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  usando la funzione omografica  $y = \frac{1+x}{1-x}$ . Esponenziale complesso e formula di Eulero.

#### Integrali in senso generalizzato

Funzioni localmente integrabili e funzioni integrabili in senso generalizzato su intervalli semiaperti limitati e illimitati. Criterio dell'integrale per la convergenza di una serie. Funzioni assolutamente integrabili. Criterio del confronto e criterio dell'ordine di infinitesimo per gli integrali in senso generalizzato su intervalli semiaperti illimitati di funzioni non negative.

#### Geometria di $\mathbb{R}^N$

Punti e vettori di  $\mathbb{R}^N$ . Struttura metrica e norma di  $\mathbb{R}^N$ . Prodotto scalare e disuguaglianza di Schwarz (solo enunciato). Rette e curve di  $\mathbb{R}^2$  e di  $\mathbb{R}^3$ ; equazione cartesiana in forma implicita ed esplicita, equazione parametrica. Piani e superficie di  $\mathbb{R}^3$ ; equazione cartesiana in forma implicita ed esplicita, equazione parametrica.

#### Funzioni

Campi scalari e campi vettoriali. Dominio di una funzione. Rappresentazioni grafiche. Componenti di una funzione a valori vettoriali. Linee e superficie di livello di un campo scalare.

Limiti e funzioni continue in  $\mathbb{R}^N$ . Teorema dell'unicità del limite (solo en.). Teorema sul limite della restrizione (solo en.). Teorema di limitatezza locale (solo en.). Teorema sul limite di una combinazione lineare (solo en.). Teorema sul limite delle funzioni composte (solo en.). Teorema di compattezza (solo en.). Teorema di connessione (solo en.). Teorema della permanenza del segno (solo en.). Teorema sul limite della funzione prodotto e della funzione reciproca (solo en.). Teorema di Weierstrass (solo en.). Teorema sulle componenti del vettore limite. Tecniche per controllare la continuità o la mancanza di continuità di una funzione in un punto. Proprietà delle funzioni continue. Limiti ad infinito, limiti infiniti.

Derivate direzionali e derivate parziali. Gradiente di un campo scalare. Matrice Jacobiana di una funzione. Determinante Jacobiano.

Trasformazione di coordinate. Coordinate polari e coordinate sferiche.

### Calcolo integrale in $\mathbb{R}^N$

Rettangoli e decomposizioni di  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Somme integrali. Funzioni integrabili secondo Riemann su un rettangolo di  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Proprietà fondamentali dell'integrale: integrabilità delle funzioni continue (solo en.), linearità dell'integrale (solo en.), monotonia (solo en.), integrale del valore assoluto, additività (solo en.). Teorema della media integrale. Interpretazione geometrica dell'integrale in  $\mathbb{R}^2$ .

Teoremi di riduzione per integrali doppi sui rettangoli. Integrali su insiemi limitati. Insiemi di  $\mathbb{R}^2$  normali rispetto ad un asse. Domini ammissibili. Integrali su insiemi normali e insiemi ammissibili di  $\mathbb{R}^2$ .

Sostituzione di variabili in  $\mathbb{R}^N$ . Teorema del cambiamento di variabili (solo en.). Integrazione in coordinate polari (giustificazione informale della formula). Elemento di superficie in coordinate cartesiane e coordinate polari.

Teoremi di riduzione per integrali tripli sui parallelepipedi. Formule di riduzione per corde e per sezioni. Insiemi di  $\mathbb{R}^3$  normali rispetto ad un piano. Domini ammissibili di  $\mathbb{R}^3$ . Insiemi sezionabili di  $\mathbb{R}^3$ . Integrazione per corde su insiemi normali e insiemi ammissibili di  $\mathbb{R}^3$ , integrazione per sezioni su insiemi sezionabili di  $\mathbb{R}^3$ . Integrazione in coordinate sferiche (giustificazione informale della formula). Elemento di volume in coordinate cartesiane e coordinate sferiche.

Applicazioni geometriche e fisiche: volumi di solidi in  $\mathbb{R}^3$ , centro di massa, momenti di inerzia.

Cenni agli integrali generalizzati su  $\mathbb{R}^N$ . L'integrale  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ .

### Integrali di linea e di superficie

Curva in  $\mathbb{R}^N$  (interpretazione dinamica). Sostegno di una curva. Curve equivalenti. Curve semplici, chiuse, regolari. Vettore tangente. Equazione della retta tangente una curva regolare in un punto.

Lunghezza dell'arco di una curva. La lunghezza di una curva non dipende dalla particolare parametrizzazione. Ascissa curvilinea. Il vettore tangente nella parametrizzazione d'arco è unitario. Integrale di linea di un campo scalare. Baricentro e momento di inerzia di un filo.

Superficie parametrizzata in  $\mathbb{R}^3$ . Linee coordinate sulla superficie (linee  $u$  e linee  $v$ ). Superficie regolare e piano tangente. Versore normale. Area di una superficie. Integrale di superficie di un campo scalare.

### Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$

La derivabilità non implica la continuità. Funzioni differenziabili. Differenziale. Approssimante lineare. Continuità e derivabilità delle funzioni differenziabili. Derivata direzionale di una funzione differenziabile. Interpretazione geometrica della differenziabilità, piano tangente. Espressione del differenziale mediante le derivate parziali. Teorema del differenziale totale (solo en.).

Funzioni a valori vettoriali. La matrice Jacobiana come matrice associata al differenziale. Teorema di differenziabilità della combinazione lineare e del prodotto. Teorema di differenziabilità della funzione composta (solo en.).

Proprietà geometriche del vettore gradiente. Direzione di massima variazione. Ortogonalità con le linee (superficie) di livello.

Teorema del valor medio. Funzioni a differenziale nullo.

Derivate parziali successive. Teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione (solo en.). Funzioni due volte differenziabili. Differenziale secondo e matrice Hessiana. Forme quadratiche. Forma quadratica associata al differenziale secondo. Approssimante quadratico di una funzione (polinomio di Taylor di ordine 2).

Punti estremali per una funzione. Punti di minimo/massimo relativo e assoluto e punti di sella. Punti critici. Test della derivata prima (teorema di Fermat). Forme quadratiche definite / semidefinite positive/negative e indefinite. Criteri per stabilire il carattere di una forma quadratica in dimensione 2 e 3 (dim. solo nel caso di  $\mathbb{R}^2$ ). Test della derivata seconda. Metodo dei minimi quadrati, retta di regressione.

Problemi di massimo e minimo vincolato. Classificazione dei possibili tipi di vincolo in  $\mathbb{R}^N$ . Caso del vincolo esplicito: curva parametrizzata in  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  e superficie parametrizzata in  $\mathbb{R}^3$ . Caso del vincolo implicito. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

## Equazioni differenziali

Definizioni e generalità. Dinamica di una popolazione. Equazioni ordinarie ed equazioni alle derivate parziali. Ordine di un'equazione. Equazioni lineari, omogenee, complete, in forma normale.

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Soluzione e integrale generale di un'equazione differenziale. Problema di Cauchy. Sei problemi fondamentali nello studio di un'equazione. Teorema di esistenza e unicità locale e globale della soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine (solo en.). Equazioni a variabili separabili. Equazioni omogenee.

Equazioni differenziali e problema di Cauchy di ordine superiore al primo. Teorema di esistenza e unicità locale e globale della soluzione di un problema di Cauchy di ordine  $n$  (solo en., cenni).

Equazioni differenziali ordinarie lineari di ordine  $n$ . Teorema fondamentale delle equazioni lineari (dim. completa solo nel caso  $n = 2$ ). Spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea. Insieme delle soluzioni dell'equazione completa. Procedimento per la risoluzione di un problema lineare. Metodo della variazione della costante per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione lineare completa del primo ordine. Nucleo risolvente.

Modello di propagazione delle epidemie. Equazione di Bernoulli.

Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti di ordine  $n$ . Determinazione di una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea (solo en.). Metodo della variazione delle costanti (solo en.). Tecniche alternative in caso di particolari termini noti.

Equazioni del secondo ordine del tipo  $y'' = f(y)$ . Esempio del moto di un proiettile e velocità di fuga. Equazioni di Eulero. Equazione logistica. Circuiti elettrici RL e RLC.

Sistemi di equazioni differenziali (cenni).

## Campi vettoriali

Rappresentazione di un campo vettoriale. Linee integrali (di forza, di flusso) di un campo. Le linee di forza del gradiente di un campo scalare sono ortogonali alle linee (superficie) di livello del campo.

Rotore di un campo in  $\mathbb{R}^3$  e divergenza di un campo in  $\mathbb{R}^N$ .

Campi conservativi. Un campo conservativo è irrotazionale. Lavoro di un campo vettoriale. Teorema di caratterizzazione dei campi conservativi.

Campi conservativi e irrotazionali in un insieme aperto stellato (solo en.).

La generalizzazione a dimensioni superiori del teorema fondamentale del calcolo. Domini regolari di  $\mathbb{R}^2$ . Il teorema di Stokes bidimensionale (formula di Gauss-Green) (dim. solo nel caso del rettangolo) e il teorema di Stokes in  $\mathbb{R}^3$  (cenni). Applicazione al calcolo delle aree. Versore normale esterno di un dominio regolare. Flusso di un campo attraverso una superficie (cenni). Teorema della divergenza (cenni).

## Testi consigliati

P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di analisi matematica 2 (per il diploma universitario)*, Università degli Studi di Trieste, Facoltà di Ingegneria. (Da richiedere al tutore o reperibile in rete).

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, *Matematica. Calcolo infinitesimale e algebra lineare.*, Zanichelli

## Altri testi

Per un'impostazione di stile *americano*: A. Adams, *Calcolo differenziale 1 e 2*, Casa Editrice Ambrosiana  
J. Stewart, *Calcolo 1 e 2*, Apogeo (2002).

Per la consultazione su argomenti di matematica generale: A. Avantageggiati, *Istituzioni di matematica*, Casa Editrice Ambrosiana-Milano.

Testi classici: E. Giusti, *Analisi matematica 1 e 2 Esercizi e complementi di analisi matematica*, Bollati Boringhieri ;

G. Gilardi, *Analisi uno e Analisi due*, McGraw-Hill.

Presso la segreteria sono disponibili fogli di esercizi sugli argomenti trattati e i testi degli esami precedenti. Alla pagina <http://www.dsm.univ.trieste.it/~obersnel> potete trovare ulteriori informazioni sul corso, tutti gli esercizi assegnati a lezione, esercizi svolti, compiti assegnati agli esami.

Franco Obersnel