

APPUNTI DEL CORSO DI METODI
MATEMATICI PER L'INGEGNERIA

Gino Tironi

Stesura provvisoria del 26 aprile, 2000.

Capitolo 1

Funzioni di una variabile complessa

1.1 Piano e sfera complessi. Continuità.

Ricordiamo che un numero complesso, nella sua *forma algebrica*, si scrive $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbf{R}$, dove i è l'unità immaginaria, tale che $i^2 = -1$. Rappresentando la parte reale di z , $\Re z$, sull'asse x e il coefficiente dell'immaginario, $\Im z$, sull'asse y , ogni numero complesso z individua un unico punto di un piano cartesiano Oxy e, viceversa, ogni punto individua un unico numero complesso. Il piano cartesiano, quando lo si pensi luogo della rappresentazione dei numeri complessi, si dice il *piano di Gauss*.

È noto che un numero complesso si può rappresentare anche in *forma trigonometrica*: $z = \rho e^{i\theta}$, dove ρ è il *modulo* di z e θ il suo *argomento* o *anomalia*. ρ è un numero reale non negativo e θ è un numero reale che ogni $z \neq 0$ individua a meno di multipli di 2π .

Il legame tra x , y e ρ , θ è il seguente: dati x e y si ottengono ρ e θ dalle equazioni:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad .$$

Dati ρ e θ , x e y si ottengono da $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.

ρ e θ si possono interpretare come le coordinate polari del punto rappresentativo di z nel piano di Argand – Gauss¹

¹Jean Robert Argand (1768–1822); Carl Friedrich Gauß (1777–1855). Gauß usò per la prima volta la rappresentazione dei numeri complessi come punti del piano, nella sua

Conviene pensare che il piano complesso \mathbf{C} sia dotato di un unico punto all'infinito, che verrà indicato con $z = \infty$.

Intorno di un punto $z_0 \in \mathbf{C}$ è ogni insieme U che contiene una *sfera aperta* (o *palla* o *disco*) avente centro in z_0 e raggio $r > 0$: U è intorno di z_0 se esiste $r > 0$ tale che $S_{z_0}^r = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < r\} \subset U$. Un intorno di ∞ è ogni soprainsieme di $S_\infty^r = \{z : |z| > r\}$.

Il fatto che \mathbf{C} si pensi dotato di un unico punto all'infinito, può essere giustificato, rappresentando i punti del piano complesso mediante una proiezione stereografica sulla superficie di una sfera, che diremo *sfera complessa* o di Riemann.

Prendiamo dunque una sfera di centro l'origine e raggio 1, riferita a coordinate cartesiane ξ, η, ζ . Proiettiamo i suoi punti dal polo nord della sfera stessa, $N = (0, 0, 1)$, sul piano equatoriale della sfera. Il piano equatoriale sia il piano $u = 0$ di un sistema cartesiano x, y, u , nel quale gli assi x e ξ , y e η , u e ζ coincidono. Se $P = (x, y) = z$ è un punto del piano equatoriale, la congiungente NP incontra la sfera complessa in un punto $P' = (\xi, \eta, \zeta)$.

Una semplice similitudine di triangoli mostra che la relazione tra le coordinate di P e P' è data da

$$1 - \zeta = \frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} \quad .$$

Cioè se (ξ, η, ζ) è un punto della sfera complessa, allora $x = \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$ se $\zeta \neq 1$. Se P' sta sulla semisfera superiore, allora $\zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}$, e $\zeta \rightarrow 1$ se $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$ e $\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ tende a ∞ per $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$. Cioè, il punto corrispondente al polo nord della sfera è il punto ∞ del piano di Gauss. Se $P = (x, y) = z$ è un punto del piano di Gauss, il corrispondente punto sulla sfera complessa, ha equazioni

$$\xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \quad .$$

Si noti che la sfera unitaria è un insieme chiuso e limitato (cioè compatto) di \mathbf{R}^3 . Le trasformazioni tra i punti del piano di Gauss e quelli della sfera complessa sono continue e biettive con inverse continue tra \mathbf{C} e la sfera privata del polo nord N . Tali trasformazioni individuano dunque un'immersione continua di \mathbf{C} in un insieme compatto che ha, per così dire, un solo punto in più di \mathbf{C} . Quest'immersione si dice allora una *compattificazione a un punto* o

tesi nel 1799; aveva scoperto questa rappresentazione nel 1797. Caspar Wessel usò la rappresentazione in una memoria presentata all'Accademia danese delle Scienze nel 1797, pubblicata nel 1798-99. Argand la propose nel suo "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques" nel 1806. Infine a Gauß si deve il nome di "numeri complessi" (1831), Werke, II, pag. 102.

Similmente $f(z)$ è continua in z_0 se e solo se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono continue in (x_0, y_0) .

Ricorderemo un fondamentale teorema della topologia del piano, che ci sarà utile in seguito. Si tratta del teorema di Jordan sulle curve continue semplici chiuse, formulato (e dimostrato in modo non completo) da Camille Jordan nel 1887. La prima dimostrazione completa e rigorosa è dovuta al topologo americano Oswald Veblen (1905).

Un'applicazione continua $z : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ si dice un *arco continuo* se $z(0) \neq z(1)$; si dice una *curva chiusa continua* se $z(0) = z(1)$. Un arco continuo si dice *semplice* se $t_1 \neq t_2$ implica $z(t_1) \neq z(t_2)$. Una curva chiusa continua è *semplice* se $z(0) = z(1)$ e $t_1 < t_2$, $z(t_1) = z(t_2)$ implica $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$.

Teorema 1.1.1 (Jordan). *Se Γ è una curva continua semplice chiusa, il complemento di Γ nel piano è l'unione di due insiemi aperti, connessi (per archi) (cioè di due domini) disgiunti. Ogni punto di Γ è punto di frontiera di ciascuno dei due domini.*

Ricordiamo che per un aperto di \mathbf{R}^n l'essere connesso equivale all'essere connesso per archi. Uno dei due domini è limitato e si dice l'*interno* di Γ : $(\Gamma)_i$. Il dominio illimitato si dice l'*esterno* di Γ : $(\Gamma)_e$.

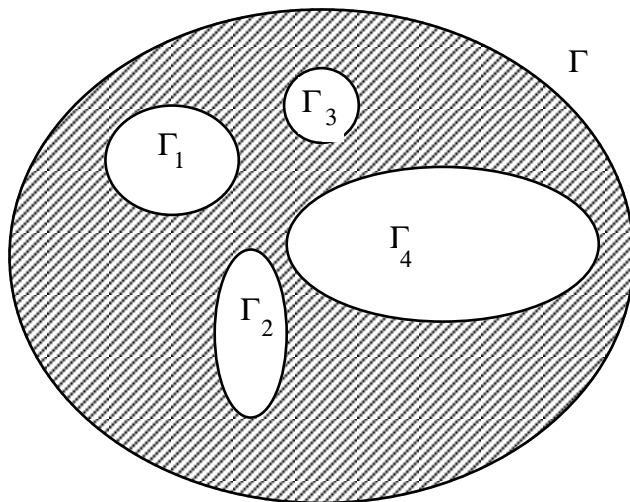
In generale, consideremo funzioni definite all'interno di una curva semplice chiusa Γ e all'esterno di k curve semplici chiuse $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$. I sostegni delle curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ sono interni a Γ e ciascuno di essi è esterno ai rimanenti: cioè per ogni r ($1 \leq r \leq k$) si ha $\Gamma_r \subset (\Gamma)_i \cap \{\cap_{s \neq r} (\Gamma_s)_e\}$. La curva Γ può "andare all'infinito", cioè mancare e qualche curva Γ_r può ridursi a un punto (cioè Γ_r può essere la curva costante). Si veda la Figura 1.2.

1.2 Monogeneità. Funzioni olomorfe.

Diremo che la funzione $f(z)$, definita in un dominio D , è *differenziabile* o *derivabile* in $z_0 \in D$ se il rapporto incrementale di $f(z)$ ha limite finito per $z \rightarrow z_0$. Cioè se esiste finito il

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} .$$

Tale limite si dice *derivata* di f in z_0 e si denota con $f'(z_0)$. Se $f(z)$ è differenziabile in ogni punto di D essa si dice *olomorfa* in D . Essa si dice olomorfa in z_0 se è derivabile in un intorno di z_0 .

Figura 1.2: Dominio molteplicemente connesso in \mathbf{C}

Altri termini usati al posto di ologomorfa sono *analitica*, *monogena*, *regolare* o *analitico-regolare*.

Le usuali regole sulla derivabilità della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni, valgono anche nel caso complesso.

È facile stabilire che ogni funzione $f(z) = z^n$ è derivabile su tutto \mathbf{C} . Infatti

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1}) = nz_0^{n-1} \quad .$$

In base alla validità delle regole di derivazione sopra ricordate ogni polinomio è derivabile e ogni funzione razionale fratta $\frac{P(z)}{Q(z)}$ è derivabile nei punti in cui $Q(z) \neq 0$.

Una funzione $f(z)$ è ologomorfa in $z = \infty$ se $f(\frac{1}{w})$ è ologomorfa in $w = 0$. In particolare, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ è ologomorfa in $z = \infty$ se $grP(z) \leq grQ(z)$.

Conviene mettere in evidenza la seguente conseguenza della derivabilità d'una funzione complessa.

Teorema 1.2.1 *Sia $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ definita in un intorno di $z_0 = x_0 + iy_0$. Se esiste finita $f'(z_0)$ allora vale*

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Inoltre le parti reale e immaginaria $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono differenziabili in (x_0, y_0) .

Dimostrazione. Se esiste il

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

allora tale limite esiste indipendentemente dal modo e, quindi dalla direzione lungo la quale z tende a z_0 . In particolare il limite si può calcolare prendendo z del tipo $z = x + iy_0$, cioè facendo tendere z a z_0 lungo una retta parallela all'asse x , oppure facendo tendere z a z_0 lungo una parallela all'asse y , cioè prendendo $z = x_0 + iy$. In ciascuno dei due casi il limite deve valere $f'(z_0)$.

Ora

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right] = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad . \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \left[\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \right] = \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad . \end{aligned}$$

Dunque si ha

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \quad . \quad (1.2)$$

Dunque valgono le condizioni (1.1) che si dicono condizioni di monogeneità o equazioni di Cauchy-Riemann.

È inoltre facile dimostrare che $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono differenziabili nel punto (x_0, y_0) . Infatti, dalla derivabilità di $f(z)$ in z_0 segue che

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \beta(z, z_0) \cdot (z - z_0) \quad ,$$

con $\beta(z, z_0)$ funzione infinitesima per $z \rightarrow z_0$. Detto $f'(z_0) = \gamma + i\delta$, separando la parte reale e quella immaginaria, si ottiene

$$u(x, y) + i v(x, y) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) + (\gamma + i\delta)(x - x_0 + i(y - y_0)) + \beta(z, z_0) \cdot (z - z_0) \quad .$$

Ossia

$$u(x, y) + i v(x, y) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) + (\gamma \cdot (x - x_0) - \delta \cdot (y - y_0)) + i(\delta \cdot (x - x_0) + \gamma \cdot (y - y_0)) + \beta(z, z_0) \cdot (z - z_0) \quad .$$

Dunque

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + (\gamma \cdot (x - x_0) - \delta \cdot (y - y_0)) + \Re\{\beta(z, z_0) \cdot (z - z_0)\}$$

e

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + (\delta \cdot (x - x_0) + \gamma \cdot (y - y_0)) + \Im\{\beta(z, z_0) \cdot (z - z_0)\}$$

Ciò mostra che $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono differenziabili in (x_0, y_0) e, inoltre, che valgono le già ricordate condizioni di monogeneità. \square

È allora immediato riconoscere la validità del seguente

Corollario 1.2.1 *Se $f(z)$ è una funzione olomorfa in un dominio D , allora le sue parti reale e immaginaria soddisfano in D le equazioni di Cauchy-Riemann in ogni punto $z = x + iy \in D$*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad .$$

Le condizioni di monogeneità sono dunque una condizione necessaria per la derivabilità o differenziabilità di una funzione di variabile complessa. Tuttavia esse non sono sufficienti. Ciò è evidenziato dal seguente esempio molto semplice dovuto a D. Menchoff. Si consideri

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{per } z \neq 0, \\ 0 & \text{per } z = 0. \end{cases}$$

Allora $\frac{f(h)}{h} = \left(\frac{h}{|h|}\right)^4$ ha valore 1 se h è reale o puramente immaginario. In generale il rapporto incrementale vale $e^{4i\theta}$ se $h = |h|e^{i\theta}$. Perciò non esiste il limite del rapporto incrementale per $h \rightarrow 0$; ossia $f(z)$ non è derivabile in $z_0 = 0$. Tuttavia esistono le derivate parziali delle parti reale e immaginaria di $f(z)$ in $(0, 0)$ e soddisfano ivi le condizioni di monogeneità. Infatti si ha

$$u_x(0, 0) = v_y(0, 0) = 1 \quad , \quad u_y(0, 0) = -v_x(0, 0) = 0 \quad .$$

Vale tuttavia il seguente

Teorema 1.2.2 *Si supponga che $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sia definita in un intorno U di z_0 e che $u(x, y)$ e $v(x, y)$ siano differenziabili in (x_0, y_0) (in particolare, che le derivate parziali esistano in U e siano continue in (x_0, y_0)). Allora, se valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, esiste finita $f'(z_0)$.*

Dimostrazione. Il rapporto incrementale in z_0 , con $z \in U \setminus \{z_0\}$, è dato da

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = \\ &= \left[\frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} + i \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \right] = \\ &= \frac{u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \beta_1(x, y)|z - z_0|}{z - z_0} + \\ &+ i \frac{v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \beta_2(x, y)|z - z_0|}{z - z_0}. \end{aligned}$$

Qui $\beta_1(x, y)$ e $\beta_2(x, y)$ sono funzioni infinitesime per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Tenendo conto che $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ e che $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$, l'espressione precedente del rapporto incrementale diviene:

$$[u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)] + [\beta_1(x, y) + i\beta_2(x, y)] \frac{|z - z_0|}{z - z_0}.$$

Poiché il fattore $\frac{|z - z_0|}{z - z_0}$ è limitato, mentre il fattore $[\beta_1(x, y) + i\beta_2(x, y)]$ è infinitesimo, si vede facilmente che il rapporto incrementale ha limite finito per $z \rightarrow z_0$, dato da $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$. \square

Si può dunque concludere con il seguente

Corollario 1.2.2 *Sia $f(z)$ definita in un dominio D ; se essa ha ivi parti reale e immaginaria differenziabili (in particolare, se le loro derivate parziali sono continue), se inoltre sono soddisfatte le condizioni di monogeneità, allora $f(z)$ è olomorfa in D .*

Abbiamo già osservato che le funzioni razionali fratte $\frac{P(z)}{Q(z)}$ sono olomorfe eccezione fatta per i punti nei quali $Q(z) = 0$. Ricordando quanto già si è stabilito per le funzioni che sono somma di una serie di potenze, possiamo concludere che la somma di una serie di potenze $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ è una funzione olomorfa nei punti interni del cerchio di convergenza.

Perciò le funzioni esponenziale, seno e coseno, definite dalle seguenti serie assolutamente convergenti in tutto \mathbf{C} , sono olomorfe su \mathbf{C} .

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad .$$

1.3 Integrale di Riemann - Stieltjes.

Facciamo una digressione sulle funzioni a variazione limitata e l'integrale di Riemann - Stieltjes. Considereremo funzioni definite su un intervallo $I = [a, b]$ a valori reali o complessi (in generale a valori in \mathbf{R}^n). Prendiamo una suddivisione $\pi = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$ e consideriamo la somma

$$S_\pi(f) = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \quad .$$

Diremo che la funzione $f(t)$ è a *variazione limitata* sull'intervallo $[a, b]$ se l'insieme delle somme $S_\pi(f)$ è limitato. Si dice *variazione totale* di f su $[a, b]$ il numero

$$V_a^b(f) = \sup\{S_\pi(f) : \pi \text{ è una suddivisione di } [a, b]\} \quad .$$

L'insieme di tutte le funzioni a variazione limitata su $[a, b]$ si denoterà con $VL(a, b)$ o con $BV(a, b)$.

Proveremo ora alcune proprietà fondamentali dell'insieme delle funzioni di variazione limitata a valori complessi.

$$f \in VL(a, b) , [\alpha, \beta] \subset [a, b] \Rightarrow f \in VL(\alpha, \beta) \text{ e } V_\alpha^\beta(f) \leq V_a^b(f) \quad (1.3)$$

Infatti basterà raffinare un'assegnata suddivisione inserendo i punti α e β tra quelli della suddivisione stessa e trascurare eventualmente i contributi alla variazione totale dovuti ai punti antecedenti α o seguenti β .

Sono poi di agevole dimostrazione, a partire dalla definizione, le seguenti proprietà valide per $f \in VL(a, b)$

$$V_\alpha^\beta(f) \geq |f(\beta) - f(\alpha)| \quad (1.4)$$

Infatti, basta osservare che $\{\alpha, \beta\}$ è la minima, nel senso dell'inclusione, di ogni suddivisione di $[\alpha, \beta]$. Da questa disuguaglianza, tenendo fisso il punto α in $[a, b]$ e facendo variare β , si deduce che ogni funzione a variazione limitata è, in particolare, limitata sul $[a, b]$. Infatti si ha $|f(x) - f(\alpha)| \leq V_\alpha^x(f) \leq V_\alpha^b(f)$, e quindi $|f(x)| \leq |f(\alpha)| + V_\alpha^b(f)$.

Infine si ha che la variazione totale è additiva

$$V_\alpha^\beta(f) = V_\alpha^\gamma(f) + V_\gamma^\beta(f) \text{ se } a \leq \alpha < \gamma < \beta \leq b \quad . \quad (1.5)$$

Basterà raffinare ogni assegnata suddivisione di $[\alpha, \beta]$ con l'inserimento del punto γ per provare la disuguaglianza \leq , e ricordare la definizione di estremo superiore per dedurre la disuguaglianza opposta \geq .

Converrà ricordare che le proprietà sopra citate sono quelle della lunghezza di una curva rettificabile, e che si dimostrano allo stesso modo. Osserveremo ulteriormente che la variazione $V_a^t(f)$ con $a \leq t \leq b$ è non-decrescente sull'intervallo $[a, b]$. Infatti se $t_1 < t_2$ si ha $V_a^{t_2}(f) - V_a^{t_1}(f) = V_{t_1}^{t_2}(f) \geq |f(t_2) - f(t_1)| \geq 0$.

Teorema 1.3.1 *L'insieme $VL(a, b)$ è stabile per la somma, il prodotto di una funzione per una costante $\alpha \in \mathbf{C}$ e il prodotto di funzioni. Cioè $VL(a, b)$ forma un'algebra sul corpo dei complessi.*

Dimostrazione. La tesi segue dalle disuguaglianze di immediata verifica

$$V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g) \quad , \quad V_a^b(\alpha f) = |\alpha| V_a^b(f) \quad \text{e}$$

$$V_a^b(fg) \leq \sup |f| V_a^b(g) + \sup |g| V_a^b(f) \quad .$$

Ciò è conseguenza della seguente disuguaglianza

$$\begin{aligned} & |f(t_i)g(t_i) - f(t_{i-1})g(t_{i-1})| \leq \\ & \leq |f(t_i)||g(t_i) - g(t_{i-1})| + |g(t_{i-1})||f(t_i) - f(t_{i-1})| \quad .\square \end{aligned}$$

Teorema 1.3.2 *Sia $f \in VL(a, b)$, a valori reali. Allora f è differenza di due funzioni non-negative, non-decrescenti.*

Dimostrazione. Sia $f(t)$ a variazione limitata. Potremo pensare che $f(a) \geq 0$, senza ledere la generalità; infatti, come vedremo nel corso della dimostrazione, nulla cambia se al posto di $f(t)$ consideriamo la traslata $f(t) + k$. Se poniamo $g(t) = f(a) + V_a^t(f)$ la funzione $g(t)$ è non-negativa ($f(a)$ e $V_a^t(f)$ sono ≥ 0) e inoltre è non-decrescente poiché così è la variazione $V_a^t(f)$. Sia poi $h(t) = f(a) + V_a^t(f) - f(t)$. Poiché $V_a^t(f) \geq |f(t) - f(a)|$, $h(t) \geq 0$ per ogni $t \in [a, b]$. Sia poi $t_1 < t_2$; allora $h(t_2) - h(t_1) = V_a^{t_2}(f) - V_a^{t_1}(f) - f(t_2) + f(t_1) = V_{t_1}^{t_2}(f) - [f(t_2) - f(t_1)] \geq |f(t_2) - f(t_1)| - [f(t_2) - f(t_1)] \geq 0$. Ovviamente è $f(t) = g(t) - h(t)$. \square

Teorema 1.3.3 *Sia $f \in VL(a, b)$, a valori complessi. Allora f è combinazione lineare di quattro funzioni non-negative, non-decrescenti.*

Dimostrazione. La parte reale e la parte immaginaria di f sono a variazione limitata. Infatti $V_a^t(\Re f) \leq V_a^t(f)$ e $V_a^t(\Im f) \leq V_a^t(f)$. Perciò sia $\Re f$, che $\Im f$ sono differenza di due funzioni con le proprietà suddette. Si ottiene allora

$$f(t) = \sum_{k=0}^3 i^k g_k(t) = g_0(t) + ig_1(t) - g_2(t) - ig_3(t) \quad .$$

Ovviamente la decomposizione di $f(t)$ non è univocamente determinata; ci sono infinite decomposizioni possibili: per esempio, tutte quelle che corrispondono a $g_k(t) + \text{costante}$. \square

È noto (Teorema sul limite delle funzioni monotone) che ogni funzione monotona su un intervallo ha limite destro e sinistro finiti in $t_0 \in (a, b)$. Per la decomposizione appena ricordata, si può concludere con il seguente

Teorema 1.3.4 *Ogni funzione a variazione limitata su un intervallo $[a, b]$ ha limiti finiti destro e sinistro in ogni punto $t_0 \in (a, b)$. \square*

Diremo *salto destro* di f in $t \in [a, b]$ il numero $S_+(f, t) = |f(t) - f(t^+)|$. Il *salto sinistro* è $S_-(f, t) = |f(t) - f(t^-)|$. Qui $f(t^+) = \lim_{u \rightarrow t^+} f(u)$ e $f(t^-) = \lim_{u \rightarrow t^-} f(u)$. Se $\alpha \in [a, b]$, allora $S_+(f, \alpha) + S_-(f, \alpha) \leq V_a^b(f)$. I punti di discontinuità di f sono esattamente quelli nei quali si ha $S_+(f, \alpha) + S_-(f, \alpha) > 0$. Una funzione monotona e a valori reali su un intervallo, per es. una funzione non-decrescente, è tale che in ogni punto t_0 dell'intervallo stesso, esistono sia i limiti da destra che da sinistra e si ha, nel caso ipotizzato, $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \leq f(t_0) \leq \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$. Dunque, i punti di discontinuità di una funzione monotona su un intervallo individuano una famiglia d'intervalli aperti disgiunti. Una siffatta famiglia può essere al più numerabile sulla retta reale (in ognuno degli intervalli cade un punto razionale diverso e \mathbf{Q} è numerabile!). Ogni funzione a variazione limitata,

a valori reali o complessi, su un intervallo è combinazione lineare di due o quattro funzioni monotone a valori reali. Dunque anch'essa può avere al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità. Si è dimostrato il seguente

Teorema 1.3.5 *Una funzione a variazione limitata su un intervallo ammette al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità. □*

Infine, definiamo funzione a variazione limitata su un intervallo $[a, \infty)$ una funzione che è a variazione limitata su ogni intervallo limitato $[a, k]$ e tale che sia finito il $\lim_{k \rightarrow \infty} V_a^k(f)$. Tale limite si dice allora variazione totale di f su $[a, \infty)$: $V_a^\infty(f)$. Allo stesso modo si definiscono le funzioni a variazione limitata su \mathbf{R} .

Occupiamoci ora di un'importante generalizzazione dell'integrale di Riemann introdotta da Thomas Jan Stieltjes nel 1894. Consideriamo due funzioni, una continua e l'altra a variazione limitata su un intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset \mathbf{R}$: $f \in C(a, b)$ e $g \in BV(a, b)$. Ricordiamo che f risulta uniformemente continua su $[a, b]$. Consideriamo una suddivisione $\pi = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$ e sia $\sigma = \{s_k\}$ una scelta di punti dell'intervallo con $s_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Consideriamo inoltre la somma

$$S_{\pi, \sigma}(f, g) = \sum_{k=1}^n f(s_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})] \quad .$$

Definiamo *diametro della suddivisione* π il numero

$$\text{diam}(\pi) = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) \quad .$$

Diciamo infine *modulo di continuità* di $f \in C(a, b)$ il numero

$$\mu(\delta; f) = \max\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| \leq \delta\} \quad .$$

Notiamo che se f è una funzione uniformemente continua il suo modulo di continuità è infinitesimo con δ .

Allora possiamo dimostrare il seguente

Teorema 1.3.6 *Se $f \in C(a, b)$ e $g \in VL(a, b)$ esiste un numero J (reale o complesso) tale che*

$$|J - S_{\pi, \sigma}(f, g)| \leq 4\sqrt{2}\mu(\delta; f)V_a^b(g)$$

se $\text{diam}(\pi) \leq \delta$.

Definizione. Il numero J , l'esistenza del quale è affermata dal precedente teorema, si dice *integrale di Stieltjes di $f(t)$ rispetto a $g(t)$ sull'intervallo $[a, b]$* e si denota con

$$\int_a^b f(t)dg(t) \quad .$$

Dimostrazione. Cominciamo ad osservare che se due somme relative alla stessa suddivisione π avente $\text{diam}(\pi) \leq \delta$ si riferiscono alle scelte σ_1 e σ_2 , allora è

$$|S_{\pi, \sigma_1}(f, g) - S_{\pi, \sigma_2}(f, g)| \leq \sum_{k=1}^n |f(s_{k,1}) - f(s_{k,2})| |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq \mu(\delta; f) V_a^b(g) \quad ,$$

per la definizione di variazione totale di g e avendo tenuto conto che $|s_{k,1} - s_{k,2}| \leq \delta$ per ogni k .

Siano ora π_1 e π_2 due suddivisioni di $[a, b]$ di diametro $\leq \delta$, tali che $\pi_1 \subseteq \pi_2$ (cioè tale che π_2 sia un *raffinamento* di π_1), e consideriamo due somme corrispondenti a queste suddivisioni: $S_{\pi_1, \sigma_1}(f, g)$ e $S_{\pi_2, \sigma_2}(f, g)$. Sia $T_1 = f(s)[g(\beta) - g(\alpha)]$ un termine di $S_{\pi_1, \sigma_1}(f, g)$. L'intervallo $[\alpha, \beta]$ è suddiviso dai punti $\{t_{\alpha, j}\}$ di π_2 . Vale allora $\sum_j [g(t_{\alpha, j}) - g(t_{\alpha, j-1})] = g(\beta) - g(\alpha)$. Il termine T_1 è allora sostituito da

$$T_2 = \sum_j f(s_{\alpha, j}) [g(t_{\alpha, j}) - g(t_{\alpha, j-1})]$$

in $S_{\pi_2, \sigma_2}(f, g)$. poiché $|s_{\alpha, j} - s| \leq \delta$, abbiamo

$$|T_1 - T_2| = \left| \sum_j [f(s) - f(s_{\alpha, j})] [g(t_{\alpha, j}) - g(t_{\alpha, j-1})] \right| \leq \mu(\delta; f) V_\alpha^\beta(g) \quad ,$$

e quindi

$$|S_{\pi_2, \sigma_2}(f, g) - S_{\pi_1, \sigma_1}(f, g)| \leq \mu(\delta; f) V_a^b(g) \quad .$$

Siano ora due somme arbitrarie, corrispondenti alle suddivisioni π_1 e π_2 con le scelte σ_1 e σ_2 . Sia $\pi_3 = \pi_1 \cup \pi_2$; tale suddivisione è un raffinamento di π_1 e di π_2 . Allora si ha

$$\begin{aligned} |S_{\pi_2, \sigma_2}(f, g) - S_{\pi_1, \sigma_1}(f, g)| &\leq |S_{\pi_2, \sigma_2}(f, g) - S_{\pi_3, \sigma_3}(f, g)| + \\ &+ |S_{\pi_3, \sigma_3}(f, g) - S_{\pi_1, \sigma_1}(f, g)| \leq 2\mu(\delta; f) V_a^b(g) \quad . \end{aligned}$$

Definiamo ora $L'_\delta = \sup\{\mathfrak{R}S_{\pi, \sigma}(f, g) : \text{diam}(\pi) \leq \delta\}$, $l'_\delta = \inf\{\mathfrak{R}S_{\pi, \sigma}(f, g) :$

$\text{diam}(\pi) \leq \delta$ e $L'_\delta = \sup\{\mathfrak{S}S_{\pi,\sigma}(f, g) : \text{diam}(\pi) \leq \delta\}$, $l''_\delta = \inf\{\mathfrak{S}S_{\pi,\sigma}(f, g) : \text{diam}(\pi) \leq \delta\}$; sia poi $I_\delta = [l'_\delta, L'_\delta] + i[l''_\delta, L''_\delta]$. Evidentemente è $I_\delta \subseteq I_\rho$ se $\delta \leq \rho$ e inoltre $L'_\delta - l'_\delta, L''_\delta - l''_\delta \leq 4\mu(\delta, f)V_a^b(g)$. Prendendo per i valori di δ , per esempio, i numeri del tipo $\frac{1}{n}$, si trova una successione d'intervalli chiusi inscatolati I_n , aventi diagonale arbitrariamente piccola ($\leq 4\sqrt{2}\mu(\frac{1}{n}; f)V_a^b(g)$). Dunque esiste un unico numero J comune a tutti gli intervalli I_n e tale J soddisfa la disuguaglianza enunciata. \square

Passiamo ora brevemente in rassegna le proprietà dell'integrale di Riemann-Stieltjes. Dalla definizione seguono immediatamente le seguenti proprietà di bilinearità e di additività dell'integrale

$$\int_a^b [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] dg(t) = \alpha \int_a^b f_1(t) dg(t) + \beta \int_a^b f_2(t) dg(t) \quad , \quad (1.6)$$

$$\int_a^b f(t) d[\alpha g_1(t) + \beta g_2(t)] = \alpha \int_a^b f(t) dg_1(t) + \beta \int_a^b f(t) dg_2(t) \quad , \quad (1.7)$$

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^c f(t) dg(t) + \int_c^b f(t) dg(t) \quad , \quad \text{per } a \leq c \leq b \quad . \quad (1.8)$$

Inoltre vale la disuguaglianza

$$\left| \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \max |f(t)| \cdot V_a^b(g) \quad (1.9)$$

poiché essa è vera per le somme.

Ricordando che per ogni termine di una somma vale

$$|f(s)[g(\beta) - g(\alpha)]| \leq |f(s)|V_\alpha^\beta(g) = |f(s)|\{V_\alpha^\beta(g) - V_\alpha^\alpha(g)\} \quad ,$$

si ottiene

$$\left| \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \int_a^b |f(t)| dV_a^t(g) \quad . \quad (1.10)$$

Osserviamo che anche il membro destro dell'equazione è un integrale di Stieltjes, poiché $|f(t)|$ è continua e $V_a^t(g) \in BV(a, b)$. La precedente disuguaglianza viene scritta spesso con la seguente, diversa notazione : $\left| \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \int_a^b |f(t)| |dg(t)|$, dove $|dg(t)|$ sta al posto di $dV_a^t(g)$. Se $g(t)$ ha derivata continua, allora si ha, come è noto, $\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt$.

Infine, scambiando i ruoli di f e di g , si perviene alla *formula d'integrazione per parti*. Infatti, si ha

$$S_{\pi,\sigma} = \sum_{k=1}^n f(s_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})] = f(s_n)g(b) - f(s_1)g(a) - \\ - \sum_{k=1}^{n-1} g(t_k)[f(s_{k+1}) - f(s_k)] \quad .$$

Prendendo il limite dell'uguaglianza per $\text{diam}(\pi) \rightarrow 0$, si ottiene

$$\int_a^b f(t)dg(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(t)df(t) \quad . \quad (1.11)$$

Se si sa solamente che $f \in C(a, b)$ e $g \in BV(a, b)$, allora questa formula fornisce la definizione dell'integrale del membro destro. Se $f, g \in C(a, b) \cap BV(a, b)$, allora la formula stabilisce la formula d'integrazione per parti, estremamente utile per valutare gli integrali di Stieltjes.

1.4 Integrazione complessa. Teorema di Cauchy.

Sia Γ una curva rettificabile del piano complesso. Intenderemo con ciò una curva d'equazione $z = z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, dove $z(t)$ è una funzione continua e di variazione limitata su $[0, 1]$. Γ è orientata dalla parametrizzazione. Cioè $z_1 = z(t_1)$ precede $z_2 = z(t_2)$ se $t_1 < t_2$. $-\Gamma$ rappresenta la stessa curva con l'orientazione opposta, cioè d'equazione $z = z(1 - t)$. La lunghezza di Γ è data da $\ell(\Gamma) = V_0^1(z)$. Se $f(z)$ è una funzione continua definita sul sostegno della curva Γ (con ciò intenderemo che f è definita su un aperto di \mathbf{C} , $\Omega \supset \Gamma([0, 1])$). Spesso il sostegno $\Gamma([0, 1])$ sarà semplicemente indicato con Γ , allora $f(z(t))$ è una funzione continua su $[0, 1]$.

Definizione. Se f è una funzione continua sul sostegno della curva continua rettificabile Γ definiamo

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_0^1 f(z(t))dz(t) \quad ,$$

dove l'integrale al secondo membro è inteso nel senso di Riemann-Stieltjes.

Le proprietà già dimostrate per l'integrale di Stieltjes permettono immediatamente di verificare che valgono le seguenti uguaglianze

I. *Linearità.*

$$\int_{\Gamma} [\alpha f_1(z) + \beta f_2(z)] dz = \alpha \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \beta \int_{\Gamma} f_2(z) dz \quad .$$

II. *Additività rispetto al cammino.* Se Γ_1 e Γ_2 sono due curve rettificabili consecutive, cioè tali che $z_1(1) = z_2(0)$ e con $\Gamma_1 + \Gamma_2$ intendiamo la curva Γ_1 seguita dalla Γ_2 , cioè la curva d'equazione

$$z(t) = \begin{cases} z_1(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ z_2(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

allora si ottiene

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz \quad .$$

III. *Cambiando l'orientazione della curva, cambia il segno dell'integrale.*

$$\int_{-\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz \quad .$$

IV. Valgono le seguenti disuguaglianze che discendono dalle (1.9) e (1.10)

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \cdot \ell(\Gamma)$$

e

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| = \int_0^1 |f(z(t))| ds(t) \quad ,$$

dove $s(t)$ è la lunghezza dell'arco della curva Γ .

V. Se la curva Γ è generalmente regolare allora

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(z(t)) z'(t) dt \quad .$$

Concludiamo con alcuni esempi fondamentali

Esempio 1.4.1 *Se Γ è una qualsiasi curva rettificabile che congiunge i punti a e b del piano complesso, allora:*

$$\int_{\Gamma} dz = \int_a^b dz = b - a \quad .$$

Infatti, quale che sia la suddivisione di $[a, b]$, si ha $\sum_{k=1}^n [z(t_k) - z(t_{k-1})] = z(1) - z(0) = b - a$.

Esempio 1.4.2 Analogamente, per ogni curva rettificabile Γ vale

$$\int_{\Gamma} z dz = \int_a^b z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \quad .$$

Infatti, dalla formula d'integrazione per parti, si ottiene

$$\int_a^b z dz = \int_0^1 z(t) dz(t) = [z(1)]^2 - [z(0)]^2 - \int_0^1 z(t) dz(t) \quad .$$

In particolare, se Γ è una curva rettificabile semplice chiusa, tale che $z(0) = z(1)$ allora $\int_{\Gamma} dz = 0$ e $\int_{\Gamma} z dz = 0$.

Esempio 1.4.3 Se Γ è un cerchio di centro a e raggio r , d'equazione $z = a + re^{i\vartheta}$, vale

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i \quad .$$

Infatti Γ è una curva regolare con $z(\vartheta)$ differenziabile. Perciò si può applicare la formula del punto **V**. $z - a = re^{i\vartheta}$; $dz = ire^{i\vartheta} d\vartheta$ e si ottiene

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\vartheta}}{re^{i\vartheta}} d\vartheta = i \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi i \quad .$$

Una curva semplice chiusa si potrà pensare dotata di un'orientazione intrinseca indipendente dalla sua parametrizzazione. Precisamente l'orientazione sarà detta positiva se, scelto un punto z_0 all'interno del circuito Γ , partendo da un punto $z \in \Gamma$ e ritornando al punto di partenza dopo avere percorso una sola volta tutto il circuito, l'argomento del numero complesso $z - z_0$ risulta aumentato di 2π . L'orientazione positiva si dirà anche *antioraria*.

Teorema 1.4.1 Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un dominio D e sia Γ una curva continua, semplice, chiusa, rettificabile tale che $\Gamma^* = \Gamma \cup (\Gamma)_i \subset (D)_i$, dove $(D)_i$ indica la parte interna di D . Allora

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad .$$

Dimostrazione. La dimostrazione sarà fatta in più passi. Innanzitutto dimostreremo che la tesi vale quando Γ è il perimetro di un triangolo di vertici z_1, z_2, z_3 . Successivamente estenderemo questo risultato ad una poligonale chiusa arbitraria ed infine passeremo al risultato nel caso generale. La dimostrazione qui esposta, che non richiede ipotesi aggiuntive di

continuità di $f'(z)$ o di regolarità di Γ , è dovuta essenzialmente a Goursat (1883), modificata da Prigsheim e Knopp (1918).

a) Sia dunque $\Gamma = \Delta$ il perimetro di un triangolo di vertici z_1, z_2, z_3 , orientato in senso antiorario o positivo, e sia $\Delta^* = \Delta \cup (\Delta)_i$. Per assurdo si supponga che $\int_{\Delta} f(z)dz \neq 0$. Sia ℓ il perimetro di Δ . Se suddividiamo il triangolo con linee congiungenti i punti medi dei suoi lati, otteniamo quattro triangoli $\Delta_{01}, \Delta_{02}, \Delta_{03}$ che contengono rispettivamente i vertici z_1, z_2, z_3 e Δ_{04} che contiene z_4 , baricentro del triangolo. Se i singoli triangoli Δ_{0i} con $i = 1, 2, 3, 4$ sono orientati positivamente, avremo

$$\int_{\Delta} f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\Delta_{0k}} f(z)dz \quad ,$$

poiché i contributi di Δ_{04} cancellano i contributi dei lati di Δ_{0k} ($k = 1, 2, 3$) che non sono semilati di Δ . Se supponiamo che $\int_{\Delta} f(z)dz \neq 0$, almeno uno dei Δ_{0k} darà contributo non nullo. Diciamo Δ_1 uno di quelli che dà contributo di modulo massimo (quello d'indice minimo, se ce n'è più d'uno). Sarà:

$$\left| \int_{\Delta} f(z)dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\Delta_1} f(z)dz \right| \quad .$$

Ripetendo questo procedimento per infiniti passi, troveremo una successione di triangoli (Δ_n) tale che sia

$$(D)_i \supset \Delta_0^* \supset \Delta_1^* \supset \dots \supset \Delta_n^* \supset \dots$$

Il perimetro di Δ_n è $\frac{\ell}{2^n}$; il suo diametro è perciò al più $\frac{1}{2} \frac{\ell}{2^n}$ e tende a zero per n che tende all'infinito. Ne segue che ci sarà un solo punto z_0 comune a tutti i domini triangolari Δ_n^* . Ed inoltre vale

$$\left| \int_{\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta_n} f(z)dz \right| \quad .$$

Poiché, per l'olomorfismo di $f(z)$ in $z_0 \in D$, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{per } 0 < |z - z_0| < \delta \quad ,$$

è $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \eta(z, z_0)$ con $|\eta(z, z_0)| \leq \epsilon |z - z_0|$ per $|z - z_0| < \delta$. Pur di scegliere n abbastanza grande si potrà rendere $|z - z_0| < \delta$ per $z \in \Delta_n^*$.

$$\int_{\Delta_n} f(z)dz = \int_{\Delta_n} [f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \eta(z, z_0)]dz$$

$$= [f(z_0) - z_0 f'(z_0)] \int_{\Delta_n} dz + f'(z_0) \int_{\Delta_n} z dz + \int_{\Delta_n} \eta(z, z_0) dz \quad .$$

I primi due integrali sono nulli, come si è dimostrato in precedenza. Inoltre

$$\left| \int_{\Delta_n} \eta(z, z_0) dz \right| \leq \epsilon \frac{\ell^2}{2 \cdot 4^n}$$

poiché $|\eta(z, z_0)| < \epsilon \cdot \frac{\ell}{2 \cdot 2^n}$ e inoltre vale la proprietà **IV**. Segue allora

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{2} 4^n \frac{\ell^2}{4^n} \epsilon = \frac{1}{2} \ell^2 \epsilon \quad .$$

Per l'arbitrarietà di ϵ , segue finalmente

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0 \quad .$$

Questo conclude il primo passo della dimostrazione.

b) Sia ora Π un poligono semplice chiuso avente la parte interna e il perimetro contenuti in D . È intuitivo, ma si può dimostrare in modo rigoroso e relativamente semplice (dimostrazione omissa), che ogni poligono semplice chiuso si può *triangolare*; cioè che si possono trovare triangoli

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

tali che: (i) le parti interne a due triangoli Δ_i e Δ_k non abbiano punti in comune per $i \neq k$, e (ii) $\cup \Delta_k^* = \Pi^*$, dove l'asterisco indica l'unione dell'interno con la frontiera (cioè la chiusura di $(\Delta_k)_i$) della curva semplice chiusa in considerazione. Ne segue che

$$\int_{\Pi} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} f(z) dz = 0 \quad .$$

Dunque, la tesi vale per arbitrari poligoni. Si veda la Figura 1.3.

c) Supponiamo ora che Γ sia un'arbitraria curva semplice, chiusa, rettificabile tale che $\Gamma^* \subset D$. Osserviamo, innanzi tutto, che Γ^* ha una distanza positiva d dal complementare di D . Si scelga un numero $0 < \rho < d$ e sia R l'insieme dei punti aventi da Γ^* una distanza non maggiore di ρ . Perciò vale $\Gamma^* \subset R \subset D$, essendo l'inclusione propria nei due casi. Sia poi $\mu(\delta, f)$ il modulo di continuità della restrizione di f a R .

Sia ora dato un numero reale $\epsilon > 0$. Possiamo trovare un insieme finito di punti z_1, z_2, \dots, z_n su Γ che soddisfano le seguenti richieste:

- (i) z_j precede z_k su Γ se $j < k$;

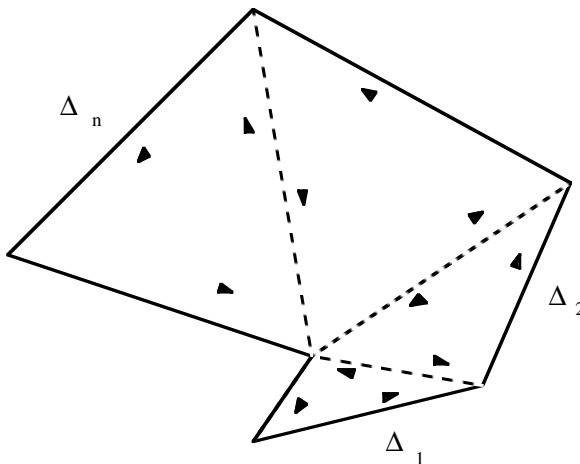


Figura 1.3: Integrazione su un poligono semplice chiuso

- (ii) tutti i segmenti $[z_k, z_{k+1}]$ sono contenuti in R . Si intende che $z_{n+1} = z_1$;
- (iii) il poligono $\Pi = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ è semplice;
- (iv) se δ è scelto in modo che $\mu(\delta, f) < \frac{\epsilon}{2\ell}$, dove ℓ è la lunghezza di Γ , allora per ogni k si ha $|z_{k+1} - z_k| < \delta$;
- (v) $|\int_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Queste condizioni si possono tutte soddisfare, salvo eventualmente la (iii). Ma se quest'ultima è violata, comunque sarà vero che

$$\int_{\Pi} f(z)dz = 0 \quad ,$$

perché, se non semplice Π , sarà l'unione di un numero finito di poligoni semplici ed eventualmente di un numero finito di segmenti percorsi due volte in direzioni opposte quando z percorre Π . Osserviamo che la somma finita soddisfacente la condizione (v) si può scrivere come un integrale. Avremo allora

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Pi} f(z)dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} [f(z) - f(z_k)]dz \right| \leq \\ &\leq \mu(\delta, f) \cdot \ell < \frac{\epsilon}{2\ell} \cdot \ell = \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che la lunghezza di Π non supera quella di Γ . Combinando questa stima con quella di (v), si trova finalmente

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Pi} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \right| + \\ &+ \left| \int_{\Pi} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad . \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ il teorema è dimostrato. \square

Il precedente teorema è fondamentale. Ne offriamo perciò una dimostrazione alternativa, basata sul Teorema di Gauss – Green nel piano. Si richiedono per questa dimostrazione ipotesi più restrittive sulla regolarità del cammino lungo il quale si integra e sulla continuità delle derivate della parte reale e immaginaria della funzione olomorfa, ipotesi che, come abbiamo visto in precedenza, non sono necessarie. Tuttavia, la dimostrazione risulta essere più rapida e comunque è istruttiva.

Teorema 1.4.2 *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un dominio D e sia Γ una curva semplice, chiusa, a tratti regolare tale che $\Gamma^* = \Gamma \cup (\Gamma)_i \subset (D)_i$. Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è tale che le derivate parziali di $u(x, y)$ e di $v(x, y)$ sono continue in $(D)_i$, allora*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad .$$

Dimostrazione. Posto $z = x + iy$, l'integrale si può così esprimere separando la parte reale da quella immaginaria

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_{\Gamma} (v(x, y) dx + u(x, y) dy).$$

Ricordando le formule di Gauss-Green:

$$\int_{\Gamma} X(x, y) dx = - \int \int_{\Gamma^*} \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} dx dy$$

e

$$\int_{\Gamma} Y(x, y) dy = \int \int_{\Gamma^*} \frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} dx dy,$$

si ottiene

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = - \int \int_{\Gamma^*} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int \int_{\Gamma^*} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad .$$

I due integrali sono nulli poiché valgono le condizioni di monogeneità. \square

Sono interessanti alcune notevoli estensioni del teorema precedente

Teorema 1.4.3 *Sia Γ una linea chiusa, semplice, continua e rettificabile e sia la sua parte interna $(\Gamma)_i$ convessa rispetto a un punto interno z_0 . Se $f(z)$ è olomorfa in $(\Gamma)_i$ ed è continua in $\Gamma^* = \Gamma \cup (\Gamma)_i$, allora è*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \quad .$$

Non dimostriamo questo teorema.

Ricordiamo che $(\Gamma)_i$ si dice convesso o stellato rispetto a un suo punto z_0 se per ogni $z \in (\Gamma)_i$ il segmento d'estremi z_0 e z è tutto contenuto in $(\Gamma)_i$.

Teorema 1.4.4 *Supponiamo che Γ_1 e Γ_2 siano due curve semplici, chiuse, rettificabili, continue che hanno la stessa orientazione e tali che Γ_1 giaccia all'interno di Γ_2 . Se $f(z)$ è olomorfa in $D \supset (\Gamma_2)_i \cap (\Gamma_1)_e$, allora*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz \quad .$$

Dimostrazione. L'affermazione è banale se $f(z)$ è olomorfa in tutto Γ_2^* , perché allora i due integrali sono nulli. Altrimenti, si prenda un punto z_0 interno a Γ_1 (e quindi a Γ_2) e si tracci una linea orizzontale² per z_0 . Il prolungamento di questa linea intersecherà almeno due volte sia Γ_1 che Γ_2 . Poiché l'insieme intersezione è un insieme compatto contenuto nella retta, andando verso destra si troverà un ultimo punto z_1 in Γ_1 e un primo punto susseguente z_2 in Γ_2 . Il segmento di linea di estremi z_1 e z_2 giace per intero in $(\Gamma_2)_i \cap (\Gamma_1)_e$. Analogamente, alla sinistra di z_0 c'è un ultimo punto z_3 in Γ_1 e un primo punto seguente z_4 in Γ_2 ; il segmento (z_4, z_3) giace per intero in $(\Gamma_2)_i \cap (\Gamma_1)_e$. I due segmenti di retta tagliano $(\Gamma_2)_i \cap (\Gamma_1)_e$ in due parti, una superiore e una inferiore. Se le due curve Γ_1 e Γ_2 sono orientate positivamente, i punti z_1 e z_3 dividono Γ_1 in due archi Γ_{11} e Γ_{12} . Analogamente z_2 e z_4 dividono Γ_2 negli archi Γ_{21} e Γ_{22} . Siano Δ_1 e Δ_2 i bordi del dominio superiore e inferiore rispettivamente. Allora $\Delta_1 = [z_1, z_2] \cup \Gamma_{21} \cup [z_4, z_3] \cup (-\Gamma_{11})$ e $\Delta_2 = (-\Gamma_{12}) \cup [z_3, z_4] \cup \Gamma_{22} \cup [z_2, z_1]$. Gli integrali estesi a Δ_1 e a Δ_2 sono nulli. Dunque

$$0 = \int_{\Delta_1} + \int_{\Delta_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_{21}} - \int_{\Gamma_{11}} + \int_{\Gamma_{22}} - \int_{\Gamma_{12}} f(z)dz \quad .$$

poiché gli integrali lungo i segmenti di retta si cancellano. Raggruppando i termini si ottiene il risultato voluto. \square

²cioè una parallela all'asse $x = \Re(z)$

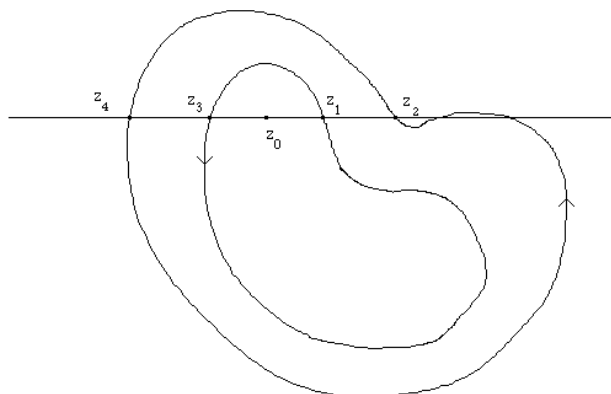


Figura 1.4: Cammini chiusi semplici, uno interno all'altro

La Figura 1.4 illustra la situazione descritta nel Teorema 1.4.4.

D'ora in poi una curva semplice, chiusa, continua, rettificabile (a variazione limitata) si dirà un "circuito" o un "laccio". Allora, più in generale, possiamo affermare la validità del seguente teorema

Teorema 1.4.5 Se $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ sono $n + 1$ circuiti e se $f(z)$ è una funzione olomorfa in un dominio D che contiene la chiusura della parte di piano interna a Γ_0 e esterna a $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, cioè $D \supset \overline{D_0}$, con

$$D_0 = (\Gamma_0)_i \cap (\Gamma_1)_e \cap \dots \cap (\Gamma_n)_e \quad ,$$

allora

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z)dz \quad .$$

La dimostrazione elementare di questo teorema si basa sulla possibilità di operare dei "tagli" che spezzino D_0 in due o più domini *semplicemente connessi*.

Ricordiamo che un dominio D del piano complesso si dice *semplicemente connesso* se il suo complementare è connesso sulla sfera complessa di Riemann.

Omettiamo la dimostrazione del teorema, rimandando per un'idea intuitiva della dimostrazione stessa alla seguente Figura 1.5.

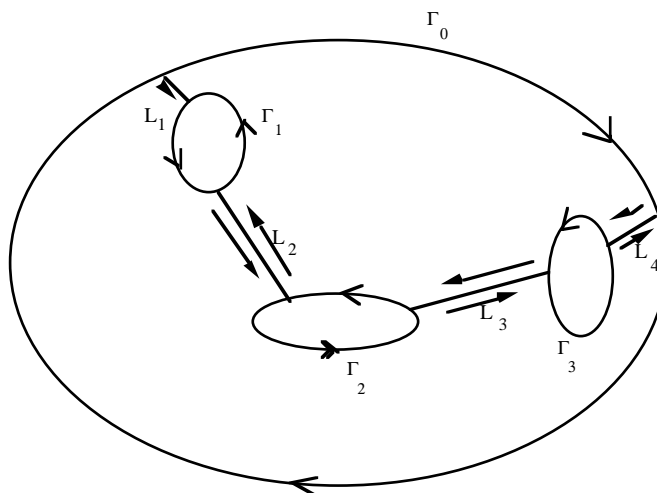


Figura 1.5: Formula di Cauchy in dominio molteplicemente connesso

I tagli L_1, L_2, L_3 e L_4 dividono D_0 in due domini semplicemente connessi e sommando i singoli contributi si ottiene la formula annunciata per il caso specifico.

Come semplice applicazione del teorema precedente, vogliamo calcolare l'integrale $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a}$ dove Γ è un circuito che non passa per il punto a . Se a è esterno a Γ , allora $f(z) = \frac{1}{z-a}$ è olomorfa in $\Gamma^* = \Gamma \cup (\Gamma)_i$ e l'integrale è nullo. Se $a \in (\Gamma)_i$, per il teorema precedente l'integrale è uguale a quello esteso a un cerchio di centro a e raggio ε . Prendendo ε sufficientemente piccolo il cerchio è contenuto in $(\Gamma)_i$. Ma quest'ultimo integrale è stato calcolato nell'Esempio 1.4.3, e vale $2\pi i$.

1.5 Formule integrali di Cauchy.

Nelle considerazioni che seguono penseremo che i circuiti siano orientati secondo la convenzione sopra esposta.

I risultati di questo paragrafo, e molti altri che seguiranno, sono conseguenze dirette del fondamentale Teorema di Cauchy dimostrato nel paragrafo precedente.

Teorema 1.5.1 (Formula integrale di Cauchy). *Sia Γ un circuito positivamente orientato e sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un dominio $D \supset \Gamma^*$; se z è un punto interno a Γ , vale*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad .$$

Dimostrazione. Dal Teorema 1.4.4 segue che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad ,$$

dove C è un cerchio di raggio $\rho = |\xi - z|$ così piccolo da essere contenuto per intero in $(\Gamma)_i$. Ricordando che $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\xi - z} d\xi = 1$, segue che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \quad .$$

Nell'ultimo integrale, l'integrando si può valutare come segue $\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = f'(z) + \eta(\xi, z)$, con $\eta(\xi, z)$ che tende a zero per $\xi \rightarrow z$. Perciò l'integrando è maggiorato in modulo da una certa costante M se $\xi \in C$ con C cerchio di raggio ρ sufficientemente piccolo. Il modulo dell'integrale è maggiorato da $\frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \ell(C) = \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot 2\pi\rho = M \cdot \rho$, che tende a zero al tendere a zero di ρ . Ma il termine a sinistra dell'uguaglianza è indipendente da ρ e quindi deve essere nullo. \square

Una conseguenza immediata del precedente teorema è la seguente proposizione che si ottiene prendendo come curva Γ un cerchio di centro il punto a e raggio r , tale che $\Gamma^* \subset D$.

Teorema 1.5.2 (Teorema della media) *Se C è un cerchio di centro a e raggio r tale che $C^* \subset D$, allora si ha*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \quad .$$

Dimostrazione. Infatti si ha

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi \quad .$$

Posto $\xi = a + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, avendo fatto le dovute sostituzioni e semplici calcoli, si trova la formula voluta. \square

Utilizzando l'enunciato del Teorema 1.4.3 si trova che la conclusione precedente vale anche nell'ipotesi che $f(z)$ sia olomorfa in $(\Gamma)_i$ e continua in Γ^* . Se z è esterno a Γ , allora si ha $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$.

Infine, se la regione in cui $f(z)$ è olomorfa è interna a un circuito Γ_0 ed esterna a $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, allora la formula scritta continua a valere se $\Gamma = \Gamma_0 - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_n$. Altro fondamentale risultato è il seguente teorema che vale per $f'(z)$.

Teorema 1.5.3 (Formula di Cauchy per la derivata). *Sotto le ipotesi del precedente Teorema 4.1, si ha*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \quad .$$

Dimostrazione. Se $z \in (\Gamma)_i$ l'integrale è una funzione $f_1(z)$ ben definita; dimostremo che coincide con $f'(z)$. Si osservi che

$$\frac{1}{h} \cdot \left[\frac{1}{\xi - z - h} - \frac{1}{\xi - z} \right] - \frac{1}{(\xi - z)^2} = \frac{h}{(\xi - z - h)(\xi - z)^2} \quad .$$

Allora

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_1(z) = \frac{h}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2(\xi - z - h)} d\xi \quad .$$

Si dica $R(\delta)$ quella parte di $(\Gamma)_i$ per la quale z (e $z+h$) distano da Γ non meno di δ . Detto M il massimo di $|f(z)|$ su Γ e $\ell(\Gamma)$ la lunghezza di Γ , l'integrale è maggiorato in modulo da

$$\frac{|h|}{2\pi} \cdot \delta^{-3} \cdot M \cdot \ell(\Gamma) \quad \text{per } z, z+h \in R(\delta) \quad .$$

Dunque esso tende a zero uniformemente rispetto a z quando $h \rightarrow 0$. Ma il termine sinistro ha limite $f'(z) - f_1(z)$ per $h \rightarrow 0$. Perciò si ha

$$f'(z) = f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \quad . \square$$

Il teorema ora dimostrato assicura che se $z \in \Gamma_i$, il risultato si può ottenere derivando sotto il segno d'integrale. Più in generale vale il seguente risultato

Teorema 1.5.4 (Formula di Cauchy per le derivate successive). *Sia $f(z)$ olomorfa nel dominio $D = (\Gamma_0)_i \cap (\Gamma_1)_e \cap \dots \cap (\Gamma_n)_e$. Allora $f(z)$ ha derivate di ogni ordine in D e si ha*

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{m+1}} d\xi \quad ,$$

per $z \in D$ e per ogni $m \in \mathbf{N}$.

Dimostrazione. (Cenno) Procedendo per induzione, supponiamo che la tesi valga per $m - 1$. Già sappiamo che essa vale per $m = 0$ e per $m = 1$, come abbiamo precedentemente dimostrato. Supponiamo dunque che esista $f^{(m-1)}(z)$ e che sia data dalla formula detta. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \cdot [f^{(m-1)}(z+h) - f^{(m-1)}(z)] &= \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\xi-z-h)^m} - \frac{1}{(\xi-z)^m} \right] d\xi \\ &= \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) d\xi \frac{1}{h} \frac{h \cdot m \cdot (\xi-z)^{m-1} + \dots}{(\xi-z)^m (\xi-z-h)^m} \\ &= \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) d\xi \frac{m \cdot (\xi-z)^{m-1} + \dots}{(\xi-z)^m (\xi-z-h)^m}. \end{aligned}$$

I puntini indicano termini contenenti il fattore h o sue potenze di grado superiore. Si può dimostrare che per $h \rightarrow 0$, con $z, z+h \in R(\delta)$, l'integrale tende uniformemente rispetto a z a

$$\frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) \frac{m}{(\xi-z)^{m+1}} d\xi = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{m+1}} d\xi \quad .\square$$

Dunque una funzione olomorfa in un dominio D risulta avere in D non solo la derivata prima in senso complesso ma derivate di ogni ordine.

1.6 Teorema di Morera. Principio del modulo.

Quanto abbiamo ricordato dopo il Teorema 1.5.3 è importante perché ci permette di dimostrare una proposizione reciproca del Teorema di Cauchy, scoperta da Giacinto Morera nel 1886

Teorema 1.6.1 (di Morera). *Si supponga che $f(z)$ sia una funzione continua in un dominio semplicemente connesso D e tale che per ogni triangolo Δ con $\Delta^* \subset D$ valga*

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0 \quad .$$

Allora $f(z)$ è olomorfa in D .

Dimostrazione. Si supponga che $a \in D$ e sia $D(a)$ un dominio stellato rispetto ad a e contenuto in D . Per $z \in D(a)$, si definisca $F(z, a) = \int_a^z f(t) dt$, dove l'integrale si calcola lungo il segmento di retta congiungente

a con z . Si prenda h in modo che $z+h \in D(a)$ e ciò accada anche per ogni punto del segmento $[z, z+h]$. Allora

$$F(z+h, a) - F(z, a) = \int_a^{z+h} f(t)dt - \int_a^z f(t)dt = \int_z^{z+h} f(t)dt$$

poiché l'integrale esteso al triangolo di vertici $a, z, z+h$ vale 0. Dunque

$$\frac{1}{h} \cdot [F(z+h, a) - F(z, a)] = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(t)dt = f(z) - \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(z) - f(t)]dt \quad .$$

Per la continuità di $f(z)$ il termine integrale nell'ultimo membro tende a 0 per $h \rightarrow 0$. Perciò vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot [F(z+h, a) - F(z, a)] = f(z) \quad .$$

Dunque $F(z, a)$ è funzione olomorfa di z in $D(a)$ e dunque in un intorno di a . Ma, per quanto si è dimostrato in precedenza, anche la sua derivata $f(z)$ è derivabile nello stesso dominio $D(a)$, cioè in un intorno di a . Cioè $f(z)$ è olomorfa in un intorno di ogni punto $a \in D$. Dunque è olomorfa in D . \square

Per le funzioni olomorfe vale una notevole proprietà di massimo.

Teorema 1.6.2 *Sia $f(z)$ olomorfa in D e sia Γ un circuito tale che $\Gamma^* \subset D$. Allora per ogni $z \in (\Gamma)_i$ vale*

$$|f(z)| \leq M(f, \Gamma) \quad ,$$

essendo $M(f, \Gamma)$ il massimo di $|f(z)|$ su Γ . Se poi $|f(z)|$ assume il valore massimo in un punto $a \in (\Gamma)_i$, allora $f(z)$ è costante in Γ^* .

Dimostrazione. Basta ricordare che, per ogni intero $k \geq 1$, si ha

$$[f(z)]^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[f(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi \quad .$$

Passando ai moduli e ricordando la maggiorazione dell'integrale

$$|f(z)|^k \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi d(z, \Gamma)} \cdot [M(f, \Gamma)]^k \quad ,$$

dove $d(z, \Gamma)$ è la distanza di z da Γ . Estraeendo la radice, si ottiene

$$|f(z)| \leq \left[\frac{\ell(\Gamma)}{2\pi d(z, \Gamma)} \right]^{\frac{1}{k}} \cdot M(f, \Gamma) \quad .$$

Prendendo il limite della disuguaglianza per $k \rightarrow \infty$, si ha finalmente

$$|f(z)| \leq M(f, \Gamma) \quad .$$

Sia $a \in (\Gamma)_i$ un punto nel quale $|f(z)|$ assume il valore massimo; si può prendere un valore $r > 0$ così piccolo che $a + r \cdot e^{i\vartheta} \in (\Gamma)_i$ per ogni $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Si ricordi inoltre che $|f(a)| \geq |f(z)|$ per ogni $z \in \Gamma^*$. Ricordando il teorema della media, $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r \cdot e^{i\vartheta}) d\vartheta$, e quindi

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(a + r \cdot e^{i\vartheta}) d\vartheta \right| \leq |f(a)| \quad ,$$

poiché $|f(a + r \cdot e^{i\vartheta})| \leq |f(a)|$. Dunque l'integrale vale proprio $|f(a)|$ e quindi

$$\int_0^{2\pi} [|f(a)| - |f(a + r \cdot e^{i\vartheta})|] d\vartheta = 0 \quad .$$

Questo significa (essendo le funzioni continue e la differenza non negativa) che l'integrando vale zero. Per l'arbitrarietà di r in un intorno di a la funzione $f(z)$ ha modulo costante. Ma si dimostra che se una funzione olomorfa porta un disco $D_r = \{z: |z| < r\}$ su un sottoinsieme di un cerchio $\{w: |w| = \rho\}$ allora $f(z)$ deve essere costante. Infatti dimostreremo (nel paragrafo 14) che una funzione olomorfa conserva gli angoli (è una trasformazione *conforme*) fra gli archi uscenti da un punto z_0 nel quale sia $f'(z_0) \neq 0$. Ora se in tutti i punti di D_r è $f'(z) = 0$ allora f è costante in D_r e quindi ovunque, come vedremo in seguito (Teorema 1.8.1). Se in qualche punto del disco è $f'(z_0) \neq 0$, si possono fare uscire da quel punto due archi che formino un angolo di $\frac{\pi}{2}$, per es. Dall'immagine che sta su un arco di circonferenza dovrebbero uscire due archi che formano un angolo retto. Ma ciò è impossibile perché lungo la circonferenza due archi uscenti dallo stesso punto possono formare solo un angolo nullo o piatto. Dunque non solo il modulo della funzione deve essere costante in un intorno di a ma la funzione stessa. \square

Dunque se f è olomorfa su un aperto $D \subset \mathbf{C}$ si può concludere in generale quanto segue: *Se $f(z)$ è una funzione olomorfa in un dominio D ed è continua in $D \cup \partial D$ (dove ∂D è la frontiera di D), se $M = M(f, \partial D)$ è il massimo di $|f(z)|$ su ∂D , allora in ogni punto di D è $|f(z)| < M$, a meno che $f(z)$ non sia costante in D .*

1.7 Sviluppi in serie di Taylor e di Laurent.

Abbiamo visto che le funzioni olomorfe in un aperto del campo complesso \mathbf{C} sono addirittura di classe C^∞ ora dimostreremo che esse ammettono una

proprietà ancora più forte.

Teorema 1.7.1 (Sviluppo in serie di Taylor). *Sia $f(z)$ una funzione olo-morfa nel cerchio $|z - a| < R$, allora si ha*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z - a)^n \quad ,$$

e la serie converge assolutamente in tale cerchio.

Dimostrazione. Osserviamo che è

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n \quad .$$

La serie scritta converge assolutamente se $|z - a| < |\xi - a|$. Se poi è $|\xi - a| = R_1$ e $|z - a| \leq \rho R_1$, con $0 < \rho < 1$, allora la serie converge uniformemente rispetto a ξ e a z . Si prenda ora R_1 tale che $0 < R_1 < R$. Se Γ_1 è il cerchio $|\xi - a| = R_1$, si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \text{per } |z - a| \leq \rho R_1 \quad (0 < \rho < 1) \quad .$$

Ora, per la convergenza uniforme della serie, si può integrare a termine a termine e quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \quad .$$

Ricordando le formule di Cauchy delle derivate successive, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Perciò, finalmente possiamo scrivere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (z - a)^n \quad .$$

Dalle considerazioni sopra svolte, segue che la serie converge assolutamente e uniformemente per $|z - a| \leq \rho R_1$, con $R_1 < R$. Ma R_1 e ρ sono arbitrari purché soddisfino le condizioni $R_1 < R$ e $0 < \rho < 1$. Si conclude che la serie converge assolutamente per ogni z tale che sia $|z - a| < R$ e uniformemente rispetto agli z tali che $|z - a| \leq \rho R$ con $0 < \rho < 1$. \square

Ne segue che una funzione olomorfa $f(z)$ può essere rappresentata dalla somma di una serie di potenze in $(z-a)$ in un intorno di ogni punto interno al suo dominio di olomorfismo D . La serie converge ed ha per somma la funzione all'interno del cerchio di centro a avente il raggio massimo compatibile con il fatto che i punti interni al cerchio siano pure interni a D . Funzioni localmente rappresentabili come somma di una serie di potenze sono dette *analitiche*. La teoria di tali funzioni è stata studiata dal matematico tedesco Weierstraß.

Il teorema appena dimostrato della sviluppabilità in serie delle funzioni olomorfe permette l'unificazione della teoria di Cauchy delle funzioni olomorfe con quella di Weierstraß delle funzioni analitiche. Infatti è già noto che le funzioni analitiche sono derivabili in senso complesso all'interno del loro cerchio di convergenza. Mentre ora abbiamo dimostrato, come conseguenza dei teoremi di Cauchy sulle derivate, che le funzioni olomorfe sono analitiche.

Qualora la funzione $f(z)$ sia olomorfa in un dominio non semplicemente connesso, il comportamento locale della funzione sarà bene illustrato utilizzando la sua sviluppabilità in serie detta di Laurent. Vale il seguente teorema

Teorema 1.7.2 (Sviluppabilità in serie di Laurent). *Se $f(z)$ è olomorfa nella corona*

$$0 \leq R_1 < |z - a| < R_2 \leq \infty \quad ,$$

allora si ha

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n \quad , \quad \text{con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \quad ,$$

dove Γ è un cerchio di centro a e raggio r , $R_1 < r < R_2$. La serie converge assolutamente nella corona circolare.

Dimostrazione. Prendiamo i seguenti numeri, rappresentanti raggi di cerchi concentrici, $R_1 < R_3 < R_5 < R_6 < R_4 < R_2$. Se $R_5 \leq |z - a| \leq R_6$ e indichiamo con Γ_1 il cerchio d'equazione $|\xi - a| = R_3$ e con Γ_2 il cerchio $|\xi - a| = R_4$, allora la formula di Cauchy per un dominio non semplicemente connesso ci dà:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad .$$

Il primo integrale definisce una certa funzione $f_2(z)$ all'interno di Γ_2 . Per questa, come si è visto, è

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \quad .$$

Per il secondo integrale si ha invece

$$-\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(z-a) - (\xi-a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^n \quad .$$

La serie converge assolutamente e uniformemente per $|\xi-a| = R_3$ e $|z-a| \geq R_5$. Si deduce allora che vale, integrando a termine a termine:

$$-f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (z-a)^{-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\xi)(\xi-a)^{n-1} d\xi \quad .$$

Ma gli integrali che intervengono nel calcolo di $f_2(z)$ e $-f_1(z)$ sono indipendenti dal cammino d'integrazione, purché sia $R_1 < |\xi-a| < R_2$. Inoltre è $f(z) = f_2(z) - f_1(z)$; allora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \quad .$$

La serie converge assolutamente e uniformemente per $R_5 \leq |z-a| \leq R_6$ se $R_1 < R_5 < R_6 < R_2$. Perciò converge assolutamente in $R_1 < |z-a| < R_2$ per l'arbitrarietà di R_5 e R_6 . \square

La parte comprendente potenze negative di $z-a$ si dice *principale* o *singolare*. Si dice *regolare* quella che contiene le potenze positive o nulle di $z-a$.

1.8 Singolarità e teorema di Liouville.

Si è dimostrato che una funzione olomorfa $f(z)$ in una regione anulare $0 \leq R_1 < |z-a| < R_2 \leq \infty$, è sviluppabile in serie di Laurent. In particolare, se $R_1 = 0$, il punto $z = a$ si dice una *singolarità isolata* della $f(z)$. Se $R_2 = \infty$, allora $z = \infty$ si dice singolarità isolata. In base alla natura della componente singolare (o principale) della serie di Laurent, si può dare una classificazione delle singolarità di una funzione olomorfa.

Supponiamo dunque che sia $R_1 = 0$. Allora la serie di Laurent converge per $0 < |z - a| < R_2$. Consideriamo i vari casi possibili

(a) Lo sviluppo di Laurent non contiene potenze negative. Allora vale

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \text{ per } 0 < |z - a| < R_2.$$

Quando $z \rightarrow a$, si ha $f(z) \rightarrow a_0$. Se definiamo $f(a) = a_0$, otteniamo una funzione continua anche in $z = a$. Si dice allora che $f(z)$ ha in $z = a$ una *singolarità eliminabile*.

(b) Vi sia un numero finito di potenze negative. Cioè $a_{-n} = 0$ per $n > m$, ma $a_{-m} \neq 0$.

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \text{ per } 0 < |z - a| < R_2.$$

Il punto $z = a$ si dirà in questo caso un *polo di ordine* (o *molteplicità*) m . Il polinomio di grado m in $(z - a)^{-1}$ si dice la *parte principale* di $f(z)$ in $z = a$. È immediato riconoscere che $(z - a)^m \cdot f(z)$ ha una singolarità eliminabile per $z = a$. Infatti

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = a_{-m} \neq 0 \quad .$$

Possiamo allora definire un polo proprio grazie a questa proprietà.

Definizione. Una funzione $f(z)$ olomorfa in $0 < |z - a| < R_2$ ha in $z = a$ un polo se esiste un intero p tale che $(z - a)^p f(z)$ abbia una singolarità eliminabile in $z = a$. Il minimo valore ammissibile per p è l'ordine del polo.

(c) Infine si possono avere infinite potenze negative. Si dice in questo caso che $f(z)$ ha una *singolarità essenziale* in $z = a$.

Il comportamento di una funzione in una singolarità essenziale è completamente diverso da quelli finora considerati. Infatti, mentre in un polo si ha $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$, e quindi in un certo senso si può assegnare valore ∞ a una funzione in un polo, invece non è possibile pensare di assegnare alcun valore alla funzione in una singolarità essenziale. Infatti un noto e importante teorema (il Teorema di Picard, 1880) afferma che:

In ogni intorno di una singolarità essenziale $z = a$ di $f(z)$, per ogni $c \in \mathbf{C}$, con l'eccezione al più di un valore di c , l'equazione $f(z) = c$ ha infinite soluzioni.

Per esempio, non è difficile provare che in ogni intorno dello zero, per ogni $c \neq 0, c \in \mathbf{C}$, l'equazione $e^{\frac{1}{z}} = c$ ha infinite soluzioni.

In $z = \infty$ le considerazioni sulle singolarità procedono in modo analogo. Se non vi sono potenze positive nello sviluppo di Laurent di $f(z)$ diremo che $z = \infty$ è una singolarità eliminabile. Se vi è un numero finito di potenze positive

$$f(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \quad ,$$

$z = \infty$ è un polo di ordine m di $f(z)$. Ciò suggerisce una definizione analoga a quella data in precedenza per un polo in $z = a$. Se vi sono infinite potenze positive, allora $z = \infty$ è una singolarità essenziale.

Trarremo ora ulteriori conseguenze dal teorema di sviluppo in serie di Taylor. Abbiamo visto che una funzione $f(z)$ si può rappresentare localmente nel suo dominio di olomorfo come la somma di una serie di potenze $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, per $|z-a| < R$, con $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Poiché la funzione identicamente nulla è ovviamente olomorfa, concludiamo che, se una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ha somma identicamente nulla per $|z-a| < R$, allora tutti i suoi coefficienti a_n sono nulli.

Anzi possiamo affermare di più

Teorema 1.8.1 (di Weierstraß). *Se $f(z)$ è olomorfa in un dominio D aperto e connesso, ed esiste una successione $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di punti di D che ha ivi almeno un punto d'accumulazione e si ha $f(z_n) = 0$, allora $f(z)$ è identicamente nulla in D .*

Dimostrazione. Se a è un punto d'accumulazione per l'insieme $\{z_n\}$, esiste certamente una sottosuccessione che converge ad a . Possiamo limitarci a considerare quella sottosuccessione, ridenominandola per semplicità $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Dunque avremo $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Per ipotesi, esiste $R > 0$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{per } |z-a| < R \quad .$$

Ma $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$. La prima uguaglianza discende dalla continuità di $f(z)$ e dal fatto che $z_n \rightarrow a$; la seconda dal fatto che il limite della successione costante (0) è 0. Dunque $a_0 = f(a) = 0$. Si ha allora $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1}$. Ora

$$a_1 = f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = 0 \quad .$$

Dunque a_0 e a_1 sono nulli. Supponiamo che non tutti i coefficienti lo siano e sia $a_n \neq 0$ quello avente indice minimo $n > 1$. Allora

$$f(z) = (z - a)^n \sum_{m=n}^{\infty} a_m (z - a)^{m-n} .$$

Il fattore $(z - a)^n$ è non nullo per $z \neq a$; inoltre, poiché

$$\lim_{z \rightarrow a} \sum_{m=n}^{\infty} a_m (z - a)^{m-n} = a_n \neq 0 ,$$

esiste un cerchio di centro a e raggio $\delta > 0$ tale che in esso sia

$$\left| \sum_{m=n}^{\infty} a_m (z - a)^{m-n} \right| > 0 .$$

Ma allora $f(z)$ nel cerchio di centro a e raggio δ non possiede alcuno zero distinto da a , contro l'ipotesi che a sia punto d'accumulazione di zeri di $f(z)$. Allora $f(z)$ deve essere identicamente nulla nel cerchio $|z - a| < R$. Ma la proprietà si estende a tutto D . Infatti diciamo

$$A = \{z \in D: f^{(n)}(z) = 0, \forall n \in \mathbf{N}\} .$$

Dimostreremo che A è non vuoto, aperto e chiuso e quindi, poiché D è connesso che $A = D$. Ovviamente $a \in A$, dunque $A \neq \emptyset$. Ora se $z \in \bar{A}$ esiste una successione (z_k) di punti di A che converge a z . Per ogni numero naturale n vale $f^{(n)}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(n)}(z_k) = 0$ e dunque $z \in A$. Cioè A è chiuso. Ma se $z_0 \in A$ quanto è stato dimostrato in precedenza fa comprendere che esiste $R_0 > 0$ tale che $f(z)$ è sviluppabile in serie con centro z_0 e raggio R_0 e che in questo disco $f(z)$ è identicamente nulla. Perciò sarà $f^{(n)}(z) = 0$ per ogni $n \geq 0$ e per ogni z tale che $|z - z_0| < R_0$; ossia A è intorno di z_0 . Per l'arbitrarietà del punto si conclude che A è aperto. Dunque $A = D$. Alternativamente si può costruire una catena finita di punti di D , $b_0 = a, b_1, \dots, b_k = b$ con $b \in D$ arbitrario, in modo tale che le seguenti condizioni siano soddisfatte: (I) Tutti i punti sono in D ; (II) b_1 sia un punto del cerchio $|z - a| < R$; poiché $f(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor in b_1 , se R_2 è il raggio di convergenza della serie, sia b_2 un punto del cerchio $|z - b_1| < R_2$; e così via. . . È possibile arrivare da a a b con un numero finito di passi; infatti il raggio di convergenza della serie di potenze in $a \in D$ è la distanza di a dalla frontiera ∂D di D . Avendo l'accortezza di scegliere i successivi punti su un cammino continuo che congiunge a con b e si mantiene a distanza finita $\geq \rho$ da ∂D , allora ogni raggio di convergenza

$R \geq \rho$; poiché l'arco continuo di estremi a e b è un sottoinsieme compatto di D , un numero finito di cerchi potrà ricoprirlo. I punti b_i saranno allora scelti nel modo voluto. Ora b_1 è un punto del cerchio $|z - a| < R$ dove $f(z)$ è identicamente nulla; allora $f^{(n)}(b_1) = 0$ per $n \geq 0$. Perciò $f(z)$ è identicamente nulla in $|z - b_1| < R_2$, e così via... Finalmente $f(b) = 0$. Per l'arbitrarietà di $b \in D$ si ha che $f(z)$ è identicamente nulla in D . \square

Come corollario si ha il seguente

Teorema 1.8.2 (Principio d'identità). *Se $f(z)$ e $g(z)$ sono due funzioni olomorfe in D_1 e D_2 rispettivamente e se in $D = D_1 \cap D_2$ esiste una successione (z_n) che ha almeno un punto d'accumulazione in D e tale che*

$$f(z_n) = g(z_n) \quad ,$$

allora $f(z) \equiv g(z)$ in D .

$g(z)$ si dice il *prolungamento analitico* di $f(z)$ in D_2 e $f(z)$ si dice il prolungamento analitico (o *continuazione*) di $g(z)$ in D_1 . È sufficiente applicare il Teorema 1.8.1 alla funzione olomorfa $h(z) = f(z) - g(z)$. \square

A riguardo degli zeri delle funzioni olomorfe possiamo affermare quanto segue

Teorema 1.8.3 *Sia $f(z)$ olomorfa in un cerchio $|z - a| < R$ e sia $f(a) = 0$, ma $f(z)$ non sia identicamente nulla. Allora esiste un numero naturale $n \geq 1$ tale che*

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \text{ ma } f^{(n)}(a) \neq 0 \quad .$$

Inoltre esiste $0 < r < R$, tale che $f(z) \neq 0$ in $|z - a| < r$, per $z \neq a$.

Dimostrazione. Vale $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ con $a_0 = 0$. Ma non tutti gli a_n possono essere nulli, perché allora sarebbe $f(z) \equiv 0$. Perciò deve esistere un minimo numero n per il quale sia $a_{n-1} = 0$ ma $a_n \neq 0$. Inoltre, poiché a non può essere punto d'accumulazione di zeri della funzione, deve esistere un cerchio $|z - a| < r$ nel quale $z = a$ è il solo zero di $f(z)$. \square

Dal teorema precedente deduciamo la seguente definizione di *zero d'ordine n* d'una funzione olomorfa.

Definizione. La funzione olomorfa $f(z)$ ha in $z = a$ uno zero di ordine o molteplicità n , se esiste una funzione $g(z)$ olomorfa in un intorno di $z = a$ e tale che $g(a) \neq 0$, per la quale è

$$f(z) = (z - a)^n g(z) \quad .$$

Daremo ora una valutazione, ricavata dalle formule integrali di Cauchy, dei moduli delle derivate successive di una funzione olomorfa. Sia $f(z)$ olomorfa in $|z - a| < R$; posto

$$M(r, a; f) = \max_{0 \leq \vartheta \leq 2\pi} |f(a + re^{i\vartheta})|$$

con $0 < r < R$, dalla formula di Cauchy $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$, con $C = \{z : |z - a| = r\}$, si deduce la disuguaglianza

$$|f^{(n)}(a)| \leq n! \cdot r^{-n} \cdot M(r, a; f) \quad .$$

Definizione. Diremo *funzione intera* una funzione olomorfa in tutto il piano complesso. Essa è dunque rappresentabile con una serie di potenze avente raggio di convergenza infinito oppure con un polinomio.

Vale allora il seguente

Teorema 1.8.4 (Teorema di Liouville). *Una funzione intera e limitata è costante.*

Dimostrazione. Nelle ipotesi dette si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad ;$$

Poniamo $M(r, 0; f) = M(r, f)$. Per ipotesi esiste un numero positivo M tale che $M(r, f) \leq M$ per ogni r . Allora otteniamo che

$$|a_n| \leq r^{-n} M(r, f) \leq M \cdot r^{-n} \quad .$$

Poiché r è arbitrario, se $n > 0$, segue che il secondo membro tende a zero per r che tende all'infinito. Ma a_n non dipende da r . Perciò $a_n = 0$ per ogni $n > 0$. Cioè $f(z) \equiv a_0$, è una funzione costante. \square

Vale anche la seguente estensione del precedente teorema

Corollario 1.8.1 *Se $f(z)$ è intera e se*

$$M(r_k, f) \leq M \cdot r_k^\alpha$$

con M, α positivi assegnati, su una successione di raggi r_k che tende all'infinito per $k \rightarrow \infty$, allora $f(z)$ è un polinomio di grado non superiore ad α .

Infatti, dalle disuguaglianze stabilite nel teorema precedente, si vede che

$$|a_n| \leq M \cdot r_k^{\alpha-n}$$

e quindi, ragionando come sopra, si trova che $a_n = 0$ per $n > \alpha$. \square

1.9 Il Calcolo dei residui.

Si è dimostrato che se $f(z)$ è olomorfa in un aperto che contiene la regione compresa tra due circuiti Γ e Γ' , orientati in modo concorde (tutti e due positivamente o tutti e due negativamente), allora si ha

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma'} f(z)dz \quad .$$

Supponiamo ora che $f(z)$ sia olomorfa in un dominio D fatta eccezione per una singolarità isolata in $z = a$. Se Γ e Γ' sono circuiti semplici che contengono a nel loro interno, allora vale ancora la formula suddetta. Anzi il circuito Γ' può essere ridotto a un cerchio di raggio arbitrariamente piccolo di centro a . È allora chiaro che l'integrale $\int_{\Gamma} f(z)dz$ dipende solo dal comportamento di $f(z)$ in un intorno del suo punto singolare $z = a$.

In generale il numero

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)dz$$

nel quale Γ è un qualsiasi circuito orientato positivamente tale che $f(z)$ sia olomorfa in un aperto che racchiude Γ e i suoi punti interni, fatta eccezione per il punto $z = a$, si dice il *residuo di $f(z)$ in $z = a$* . Questo numero sarà indicato con il simbolo $R(f; a)$.

Supponiamo poi che il circuito orientato positivamente Γ contenga più singolarità isolate nei punti a_1, a_2, \dots, a_n . Se $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ sono circuiti orientati positivamente tutti interni a Γ e a due a due esterni l'uno all'altro che contengono ciascuno nel suo interno un solo punto singolare, cioè $a_k \in (\Gamma_k)_i$, allora si avrà

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z)dz \quad ,$$

e quindi, poiché $\int_{\Gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \cdot R(f; a_k)$

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot [R(f; a_1) + \dots + R(f; a_n)] \quad .$$

Abbiamo così dimostrato il seguente

Teorema 1.9.1 (Teorema dei residui). *Se $f(z)$ è olomorfa all'interno e su Γ , circuito orientato positivamente, eccettuati i punti a_1, a_2, \dots, a_n allora l'integrale di $f(z)$ esteso a Γ è uguale alla somma dei residui nelle singolarità interne a Γ , moltiplicato per $2\pi i$. \square*

Con la locuzione “olomorfa all’interno e su Γ ” intendiamo che $f(z)$ è olomorfa in un aperto contenente Γ^* , o, se si preferisce che è olomorfa in $(\Gamma)_i$ ed è continua in Γ^* , ipotesi sufficiente ad assicurare la validità del teorema integrale di Cauchy.

Poiché in un intorno di una singolarità isolata $z = a$, $f(z)$ ammette lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - a)^n$$

e poiché $\int_{\Gamma} (z - a)^n dz = 0$ per ogni $n \neq -1$, mentre $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a} = 1$, si ha che il residuo di $f(z)$ in $z = a$ coincide con il coefficiente a_{-1} del suo sviluppo di Laurent in un intorno del punto singolare $z = a$. In particolare se $z = a$ è un polo semplice, si ha

$$R(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot f(z) \quad .$$

Se $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ e $z = a$ è uno zero semplice di $Q(z)$ allora

$$R(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{Q(z) - Q(a)} \cdot P(z) = \frac{P(a)}{Q'(a)} \quad .$$

Se $z = a$ è un polo multiplo, si potranno seguire due vie: o calcolare direttamente lo sviluppo in serie di Laurent (via in generale unica se $z = a$ è una singolarità essenziale), oppure utilizzare le seguenti considerazioni.

Se $f(z)$ ha in $z = a$ un polo d’ordine n , si ha

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - a)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

Dunque

$$(z - a)^n \cdot f(z) = a_{-n} + \dots + a_{-1}(z - a)^{n-1} + a_0(z - a)^n + a_1(z - a)^{n+1} + \dots$$

e quindi

$$R(f; a) = a_{-1} = \frac{1}{(n - 1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - a)^n \cdot f(z) \right]_{z=a} \quad .$$

Presentiamo ora alcuni esempi ed esercizi sul calcolo di integrali con il metodo dei residui.

1.9.1 ESEMPI ED ESERCIZI.

Esempio 1.9.1 *Si calcoli*

$$\oint_{|z|=3\pi} \frac{dz}{e^z - 1} .$$

La funzione integranda presenta singolarità per $e^z = 1$, cioè per $z_k = 2k\pi i$. Prenderemo in considerazione solo quelle interne al cerchio di centro l'origine e raggio 3π , cioè $z = 0$ e $z = \pm 2\pi i$. In tutti questi punti la singolarità è un polo semplice; dunque avremo:

$$R(f; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1;$$

$$R(f; \pm 2\pi i) = \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi i} \frac{z \mp 2\pi i}{e^z - 1} = 1 .$$

Perciò

$$\oint_{|z|=3\pi} \frac{dz}{e^z - 1} = 2\pi i \{R_0 + R_{2\pi i} + R_{-2\pi i}\} = 6\pi i .$$

Esempio 1.9.2 *Calcolare*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} .$$

Conviene osservare che se si pone $z = e^{i\theta}$, si ottiene per le formule d'Eulero: $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ e $\sin \theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$; l'integrale nella variabile θ che va da 0 a 2π diviene un integrale nella variabile z che percorre la circonferenza $|z| = 1$. Inoltre da $z = e^{i\theta}$ segue $dz = i \cdot e^{i\theta} d\theta = iz d\theta$. Cioè $d\theta = \frac{1}{iz} dz$. Inoltre $\sin^2 \theta = [\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})]^2 = -\frac{1}{4}(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2})$. Dunque

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz} \frac{dz}{1 - \frac{1}{4}(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2})} = -\frac{4}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{z^4 - 6z^2 + 1} .$$

Le singolarità di $f(z)$ sono date dalle soluzioni di $z^4 - 6z^2 + 1 = 0$; cioè $z^2 = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Di queste, $z = \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ sono interne alla circonferenza $|z| = 1$, le altre sono esterne. In questi punti la funzione ha poli semplici. Facilmente si calcolano i residui con le formule ricordate; $R(\pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}; f) = \frac{\sqrt{2}}{4i}$. Finalmente

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = 2\pi i \left\{ \frac{\sqrt{2}}{4i} + \frac{\sqrt{2}}{4i} \right\} = \pi\sqrt{2} .$$

Esempio 1.9.3 *Si calcoli*

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z dz}{z^2(z-1)} .$$

Si nota subito che $z = 0$ e $z = 1$ sono poli della funzione. $z = 0$ è un polo doppio, mentre $z = 1$ è polo semplice. Per calcolare il residuo in $z = 0$ si potrà procedere o calcolando lo sviluppo di Laurent della funzione integranda in un intorno del detto punto o usando la formula per i poli multipli. In questo caso calcoleremo esplicitamente lo sviluppo di Laurent della funzione in $z = 0$. Precisamente, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{z^2(z-1)} &= -\frac{e^z}{z^2(1-z)} = -\frac{1}{z^2} \left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right) \left(1+z+z^2+z^3+\dots\right) \\ &= -\frac{1}{z^2} \left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+z+z^2+\frac{z^3}{2!}+z^2+z^3+z^3+\dots\right) \\ &= -\frac{1}{z^2} \left[1+2z+z^2\left(\frac{1}{2}+2\right)+z^3\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+2\right)+\dots\right] = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} - \frac{5}{2} - \frac{8}{3}z + \dots \end{aligned}$$

Dunque $R_0 = -2$. Con facili calcoli si trova poi $R_1 = e$. Finalmente si ottiene

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z dz}{z^2(z-1)} = 2\pi i(e-2) .$$

1.9.2 ESERCIZI.

Calcolare i seguenti integrali

Esercizio 1.9.1

$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z(z^2-1)} \quad (= 0)$$

Esercizio 1.9.2

$$\oint_{|z|=6} \frac{dz}{1-\cos z} \quad (= 0)$$

Esercizio 1.9.3

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{\log z dz}{(z-2)^2}, \text{ con } -\pi < \Im \log z < \pi \quad (= \pi i)$$

Esercizio 1.9.4

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{5 + 4 \cos \theta} \quad (= \frac{\pi}{6})$$

Esercizio 1.9.5

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-1)(z-3)^2} \quad (= \frac{5}{18}\pi i)$$

Qui Γ è il rettangolo di vertici $\pm 2 \pm 2i$.

1.9.3 Integrali fra limiti infiniti.

L'applicazione del calcolo dei residui alla valutazione di integrali definiti fu un problema al quale Cauchy dedicò moltissima attenzione e in successive memorie escogitò molti metodi per trattare numerose classi d'integrali. Supponiamo che la funzione integranda sia una funzione razionale $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con $P(z)$ e $Q(z)$ polinomi a coefficienti complessi e $\text{gr}Q(z) \geq \text{gr}P(z) + 2$. Supponiamo poi che $Q(z)$ non abbia zeri sull'asse reale. Si voglia calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad .$$

A tale scopo costruiamo il seguente cammino d'integrazione $\Gamma_R = [-R, +R] + C_R$, dove $C_R = \{z = Re^{i\vartheta} : 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$ e supponiamo che nessuna singolarità della funzione cada su tale curva; $[-R, +R]$ è il segmento della retta reale che va da $-R$ a $+R$. Si ha allora

$$\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{\Im a_k > 0} R \left(\frac{P(z)}{Q(z)}; a_k \right),$$

dove si intende che la somma sia estesa ai residui calcolati nelle singolarità contenute in Γ_R . Poiché le uniche singolarità della funzione considerata sono un numero finito di poli, se R è sufficientemente grande la somma sarà estesa a tutte le singolarità contenute nel semipiano superiore. Valutiamo ora l'integrale esteso al semicerchio C_R . Osserviamo che esiste R_0 tale che per $R > R_0$, se $z = Re^{i\vartheta}$

$$\left| \frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} \right| \leq M \cdot R^{-2} \quad .$$

Perciò

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} iRe^{i\vartheta} d\vartheta \right| \leq MR^{-2}R\pi = \pi \frac{M}{R} .$$

Questo integrale tende a 0 per R che tende all'infinito. Dunque, prendendo il limite per $R \rightarrow \infty$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\Im a_k > 0} R\left(\frac{P(z)}{Q(z)}; a_k\right) .$$

In modo analogo si può dedurre che è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -2\pi i \sum_{\Im a_k < 0} R\left(\frac{P(z)}{Q(z)}; a_k\right) ,$$

dove si intende che la somma sia estesa ai residui delle singolarità contenute nel semipiano inferiore. Perciò, se, in particolare, i poli di $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ sono contenuti tutti nel semipiano superiore o tutti nel semipiano inferiore, si può subito dedurre che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 0 .$$

Lo stesso metodo si può utilizzare per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, se $|f(Re^{i\vartheta})| \leq MR^{-k}$, con $k > 1$, per $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

Un metodo analogo a quello sopra descritto si può applicare anche a integrali del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx ,$$

con $a > 0$ reale. In generale, si intende che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$ indichi il $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{iax} f(x) dx$. Dunque, se $f(x)$ non è assolutamente integrabile su tutta la retta, più correttamente questo integrale si dirà la parte principale o valore principale secondo Cauchy dell'integrale stesso (si veda il paragrafo 1.10). Si farà uso in questo caso del seguente

Lemma 1.9.1 (di Jordan). *Sia C_R una semicirconferenza del piano superiore, come nelle considerazioni precedenti. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa nel semipiano superiore tranne che per un numero finito di singolarità isolate ed esista R_0 tale che per $R > R_0$, se $z = Re^{i\vartheta}$ si abbia $|f(Re^{i\vartheta})| \leq MR^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, e sia $a > 0$. Allora*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0 .$$

Dimostrazione. Se $R > R_0$, si ha, per ipotesi, $|f(Re^{i\vartheta})| \leq MR^{-\alpha}$. Dunque, per il modulo dell'integrale esteso a C_R , si ottiene

$$\left| \int_0^\pi e^{iaR(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} i R e^{i\vartheta} f(Re^{i\vartheta}) d\vartheta \right| \leq MR^{1-\alpha} \int_0^\pi e^{-aR \sin \vartheta} d\vartheta = \\ 2MR^{1-\alpha} \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \vartheta} d\vartheta.$$

Si osserva facilmente che la funzione $\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$ è decrescente nell'intervallo da 0 a $\pi/2$. Infatti $\frac{d}{d\vartheta} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = \frac{\cos \vartheta}{\vartheta^2} \cdot (\vartheta - \tan \vartheta) < 0$ nel detto intervallo. Vale allora in $[0, \pi/2]$ $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \leq 1$, e quindi nello stesso intervallo, $\frac{2}{\pi} \vartheta \leq \sin \vartheta \leq \vartheta$. Allora avremo

$$\int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \vartheta} d\vartheta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi} \vartheta} d\vartheta \leq \frac{\pi}{2aR} (1 - e^{-aR}) \quad .$$

Infine

$$\left| \int_\Gamma e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \frac{M\pi}{a} R^{-\alpha} (1 - e^{-aR}) \quad .$$

La suddetta maggiorazione tende a zero per $R \rightarrow \infty$ se $a > 0$ e $\alpha > 0$. \square

1.9.4 Il residuo all'infinito.

Supponiamo che la funzione $f(z)$ sia olomorfa in tutto il piano complesso tranne che in un numero finito di punti di singolarità isolata. Sia inoltre ∞ punto regolare per la funzione. Esiste certamente in \mathbf{C} un cerchio C_R , positivamente orientato, di raggio R sufficientemente grande che contiene tutte le singolarità di $f(z)$. Dunque sarà:

$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_k R(f; a_k) \quad .$$

D'altra parte, se C_R viene percorso in senso negativo (orario) esso è un circuito positivamente orientato intorno al punto ∞ . Il teorema dei residui fornisce dunque:

$$-2\pi i \sum_k R(f; a_k) = \int_{-C_R} f(z) dz = 2\pi i R_\infty \quad .$$

Concludiamo allora che la somma di tutti i residui di $f(z)$, compreso quello all'infinito, è nulla.

$$\sum_k R(f; a_k) + R_\infty = 0 \quad .$$

Si osservi che R_∞ non è nullo anche quando $f(z)$ è regolare all'infinito. Infatti, in questo caso, si ha

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

Il residuo $R_\infty = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_R} f(z) dz$ si può così calcolare. Posto $w = \frac{1}{z}$, si ha

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = a_0 + a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \dots, \text{ e } dz = -\frac{dw}{w^2}.$$

Notiamo che se z percorre il cammino $-C_R$ in senso positivo intorno a ∞ , w percorre il cammino $C_{\frac{1}{R}}$ anch'esso in senso positivo intorno a $w = 0$. Dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_R} f(z) dz &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\frac{1}{R}}} g(w) \frac{dw}{w^2} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\frac{1}{R}}} \frac{dw}{w^2} (a_0 + a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \dots) = -a_{-1}. \end{aligned}$$

Dunque il residuo all'infinito è dato da $R_\infty = -a_{-1}$. In particolare si ha $\int_C f(z) dz = 0$ se C racchiude tutti i punti singolari al finito e il coefficiente a_{-1} dello sviluppo di Laurent di $f(z)$ all'infinito è nullo.

1.9.5 ALTRI ESEMPI ED ESERCIZI.

Esempio 1.9.4 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

Secondo quanto esposto nel paragrafo **1.9.3** il valore dell'integrale è $2\pi i$ volte la somma dei residui che stanno nel semipiano superiore della funzione. Ora $z^4 = -1$ ha le seguenti soluzioni $z = \varepsilon_k = e^{(2k+1)i\pi/4}$, con $k = 0, 1, 2, 3$. Di questi $\varepsilon_0 = e^{i\pi/4} = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ e $\varepsilon_1 = e^{3i\pi/4} = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ stanno nel piano superiore. Dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \cdot [R(f; \varepsilon_0) + R(f; \varepsilon_1)].$$

Ma, tenendo presente che le singolarità sono poli semplici, si ha

$$R(f; \varepsilon_0) = \frac{P(\varepsilon_0)}{Q'(\varepsilon_0)} = \frac{\varepsilon_0^2}{4\varepsilon_0^3} = \frac{1}{4\varepsilon_0} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

Analogamente $R(f; \varepsilon_1) = \frac{1}{4\varepsilon_1} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$. Finalmente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \cdot \left[\frac{1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad .$$

Esempio 1.9.5 *Calcolare*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}, \quad n \geq 2.$$

Convieni, in questo caso, considerare un cammino nel piano complesso che contenga una sola singolarità della funzione. Tale cammino dipende da n . Poiché i poli di $f(z)$ sono dati dalle soluzioni di $z^n + 1 = 0$, cioè sono le radici n -esime di -1 , che sono $z_k = e^{i(\pi/n+2\pi k/n)}$ con $k = 0, 1, \dots, (n-1)$, il cammino Γ_n che considereremo è il seguente: $\Gamma_n = [0, R] + C_{R,n} + e^{i2\pi/n} \cdot [R, 0]$, dove $e^{i2\pi/n} \cdot [R, 0]$ indica il tratto di segmento che congiunge l'origine al punto $Re^{i2\pi/n}$, orientato dal punto stesso verso l'origine. Questo cammino contiene al suo interno il solo polo semplice di $f(z)$ in $z = e^{i\pi/n}$. Il residuo in tale punto, essendo la funzione del tipo $\frac{1}{Q(z)}$, vale

$$R(f; e^{i\pi/n}) = \frac{1}{Q'(e^{i\pi/n})} = \frac{1}{ne^{i\frac{n-1}{n}\pi}}$$

Dunque

$$\int_{\Gamma_n} \frac{dz}{1+z^n} = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_{R,n}} \frac{dz}{1+z^n} + \int_R^0 \frac{d\rho e^{i2\pi/n}}{1+\rho^n e^{2\pi i}} = \frac{2\pi i}{n} \cdot e^{-i\frac{n-1}{n}\pi}$$

Ora

$$\left| \int_{C_{R,n}} \frac{dz}{1+z^n} \right| \leq \frac{2\pi R}{n(R^n - 1)},$$

e dunque tende a zero per $R \rightarrow \infty$. Prendendo il limite per $R \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} - e^{i2\pi/n} \int_0^\infty \frac{d\rho}{1+\rho^n} = (1 - e^{i2\pi/n}) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{2\pi i}{n} \cdot e^{-i\frac{n-1}{n}\pi}.$$

Facendo alcuni semplici calcoli e ricordando le formule d'Eulero per il seno, si trova finalmente

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \quad .$$

Esempio 1.9.6 *Calcolare*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} .$$

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)}$$

ha in $z = i$ un polo doppio e in $z = 2i$ un polo semplice. I residui valgono

$$R(f; 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{(z - 2i)}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z - 2i)} = \frac{-i}{36} ,$$

$$R(f; i) = \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - i)^2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} \right]_{z=i} = \frac{-i}{36} .$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} = \pi i \left(\frac{-i}{18} \right) = \frac{\pi}{18} .$$

1.9.6 ESERCIZI.

Calcolare i seguenti integrali

Esercizio 1.9.6

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} , \quad (a, b > 0, a \neq b) \quad \left(= \frac{\pi}{2ab(a+b)} \right)$$

Esercizio 1.9.7

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} \quad \left(= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right)$$

Esercizio 1.9.8

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} \quad \left(= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$$

Esempio 1.9.7 *Si calcoli l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx .$$

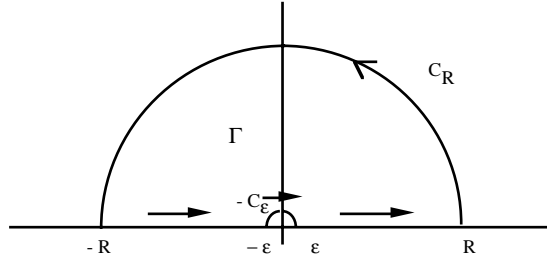


Figura 1.6: Cammino d'integrazione

Consideriamo il seguente integrale

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz, \quad ,$$

dove Γ è il seguente cammino d'integrazione: l'asse reale da ε a $+R$, il semicerchio del piano superiore di centro l'origine e raggio R , C_R , l'asse reale da $-R$ a $-\varepsilon$ e il semicerchio del piano superiore di centro l'origine e raggio ε orientato negativamente $-C_\varepsilon$. Si veda la Figura 1.6. $\Gamma = [\varepsilon, R] + C_R + [-R, -\varepsilon] + (-C_\varepsilon)$. Evidentemente, non essendoci singolarità interne al circuito, si ha

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Cioè

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Per il lemma di Jordan **1.9.1** si ha che $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$. Ne segue che

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Poiché $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, si trova

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz .$$

D'altra parte

$$\int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-C_\varepsilon} \frac{dz}{z} + \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz.$$

Ma lungo C_ε , $z = \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [\pi, 0]$. Poiché $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz} - 1}{z} = i$, esistono una costante positiva M e un numero positivo ε_0 tali che se $\varepsilon < \varepsilon_0$ si ha $|\frac{e^{iz} - 1}{z}| \leq M$. Dunque

$$|\int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz| \leq M\varepsilon\pi \quad .$$

Finalmente si trova

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_\pi^0 i d\theta + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-C_\varepsilon} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = -i\pi + 0 = -i\pi.$$

Dunque

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = -(-i\pi) = i\pi.$$

E finalmente

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Esercizio 1.9.9 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx \quad \left(= \frac{\pi}{12} \right)$$

Esercizio 1.9.10 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0) \quad \left(= \frac{\pi e^{-a}}{a} \right)$$

Esercizio 1.9.11 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0) \quad \left(= \pi e^{-a} \right)$$

Esercizio 1.9.12 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx \quad \left(= \frac{\pi}{8a^3} \right)$$

1.10 Valore principale dell'integrale.

È ben noto che se la funzione integranda, reale di variabile reale, ha in $x = x_0$ una singolarità, allora si definisce l'integrale generalizzato di $f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ come segue

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_0 + \eta}^b f(x) dx \quad .$$

Può accadere che tale limite non esista, ma che esista invece il limite seguente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right\} \quad .$$

In questo caso si dice che tale limite è *il valore principale dell'integrale secondo Cauchy*, e si scrive

$$\text{P} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right\} \quad .$$

Analogamente si definisce il valore principale secondo Cauchy dell'integrale di $f(x)$ su tutta la retta reale, come segue

$$\text{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx \quad ,$$

quando la funzione $f(x)$ sia integrabile su ogni intervallo limitato della retta reale.

Le stesse considerazioni si possono ripetere nel campo complesso. Se consideriamo un integrale del tipo $\int_{\Gamma} f(z) dz$ e la funzione $f(z)$ ha una singolarità in $z_0 \in \Gamma$, diremo *valore principale dell'integrale* il valore ottenuto con il seguente procedimento. Escluderemo z_0 dal cammino d'integrazione, togliendo a Γ un arco $\overline{z_1 z_2}$, con $|z_1 - z_0| = |z_2 - z_0| = \rho$. Se esiste il limite per $\rho \rightarrow 0$, esso si dice il *valore principale secondo Cauchy dell'integrale*.

$$\text{P} \int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \overline{z_1 z_2}} f(z) dz \quad .$$

Consideriamo come caso particolare la formula di Cauchy. Sappiamo che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} 0 & : z \in (\Gamma)_e \\ f(z) & : z \in (\Gamma)_i \end{cases} \quad ,$$

mentre nulla si può dire se $z \in \Gamma$.

In questo caso il valore principale dell'integrale ha un preciso significato, se il cammino d'integrazione Γ è sufficientemente regolare. Supponiamo dunque che Γ abbia solo un numero finito di punti angolosi. Vogliamo calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \text{P} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad ,$$

quando $z \in \Gamma$. Sia C_{ρ} un cerchietto di centro z e raggio ρ e sia C_1 la parte di $C_{\rho} \subset (\Gamma)_i$. Se $\Gamma_{\rho} = \Gamma \setminus \overline{z_1 z_2} + C_1$, si ha

$$\int_{\Gamma \setminus \overline{z_1 z_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 \quad .$$

Infatti non ci sono singolarità all'interno di Γ_{ρ} . Dunque

$$\int_{\Gamma \setminus \overline{z_1 z_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = - \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad .$$

E finalmente

$$\frac{1}{2\pi i} \text{P} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \overline{z_1 z_2}} f(z) dz = - \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi .$$

Ma vale

$$\int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \int_{C_1} \frac{1}{\xi - z} d\xi + \int_{C_1} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \quad .$$

Per la derivabilità di f in z il modulo della funzione integranda nel secondo integrale è limitato, mentre la lunghezza del cammino tende a zero per $\rho \rightarrow 0$. Dunque il limite del secondo integrale è nullo per $\rho \rightarrow 0$. Per valutare il primo integrale si può osservare che $z_k = z + \rho e^{i\vartheta_k(\rho)}$, $k = 1, 2$, e dunque

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{1}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\vartheta_1(\rho)}^{\vartheta_2(\rho)} i d\vartheta = \frac{\vartheta_2(\rho) - \vartheta_1(\rho)}{2\pi} \quad .$$

Prendendo il limite per $\rho \rightarrow 0$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \text{P} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \frac{\omega(z)}{2\pi} \quad ,$$

dove $\omega(z) = \pi - \alpha$ è il supplemento del salto angolare subito dalla tangente al cammino Γ nel punto z . Se il punto z non è un punto angoloso, allora $\alpha = 0$ e quindi $\omega(z) = \pi$.

1.10.1 Esercizi**Esercizio 1.10.1** *Calcolare*

$$\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-a)}, \Im(a) \neq 0 \quad .$$

Isoliamo l'origine con un cerchietto di raggio ε e consideriamo il cammino d'integrazione Γ comprendente un semicerchio nel piano superiore di raggio R , uno di raggio ε e i tratti dell'asse reale da $-R$ a $-\varepsilon$ e da ε a R , come quello della figura 1.6. Allora

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-a)} = \begin{cases} \frac{2i}{a} & : \text{ se } \Im(a) > 0 \\ 0 & : \text{ se } \Im(a) < 0 \end{cases} \quad .$$

Prendendo il limite per $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-a)} &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{x(x-a)} \right\} + \frac{1}{\pi} \int_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{z(z-a)} = \\ &= \begin{cases} \frac{2i}{a} & : \text{ se } \Im(a) > 0 \\ 0 & : \text{ se } \Im(a) < 0 \end{cases} \quad . \end{aligned}$$

Valutiamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{z(z-a)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{i d\vartheta}{\varepsilon e^{i\vartheta} - a} = i \frac{\pi}{a} \quad .$$

Finalmente, prendendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, si trova

$$\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-a)} = \begin{cases} \frac{i}{a} & : \text{ se } \Im(a) > 0 \\ \frac{-i}{a} & : \text{ se } \Im(a) < 0 \end{cases} \quad .$$

Esercizio 1.10.2 *Calcolare*

$$\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2(x-t)}, \quad \Im(a) \neq 0 \quad .$$

Esercizio 1.10.3 *Calcolare*

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\vartheta}{3 + \cos\vartheta} d\vartheta \quad \left(= -\frac{3\sqrt{2}-4}{4}\pi \right) \quad .$$

1.11 L'indicatore logaritmico.

Prima di addentrarci nel teorema dell'indicatore logaritmico presenteremo brevemente il *logaritmo* nel piano complesso.

Dato un numero complesso $z = \rho e^{i\vartheta}$ diremo logaritmo di z ($\log z$) ogni numero complesso $w = u + iv$ tale che

$$e^{u+iv} = z = \rho e^{i\vartheta} \quad .$$

È allora evidente che affinché valga la precedente uguaglianza deve essere $e^u = \rho$, cioè $u = \log \rho = \log |z|$ e $v = \vartheta + 2k\pi$. Dunque ogni numero complesso $z \neq 0$ ha infiniti logaritmi

$$\log z = \log |z| + i(\vartheta + 2k\pi) \quad ,$$

dove ϑ è un argomento di z ; dunque non si può parlare nel piano complesso di una *funzione* logaritmo. Tuttavia, se per l'argomento di z si sceglie un numero compreso in un assegnato intervallo di ampiezza 2π , si può isolare un solo argomento di z . Le scelte più comuni sono $-\pi \leq \vartheta = \arg(z) < \pi$ o $0 \leq \vartheta = \arg(z) < 2\pi$; in questo caso si dice che il valore scelto dell'argomento è il *valore principale dell'argomento*. Le due scelte corrispondono a "tagliare" il piano complesso lungo il semiasse reale negativo, o, rispettivamente, lungo il semiasse reale positivo. In realtà ogni "taglio" nel piano complesso che vada dall'origine al punto all'infinito è atto a rendere univoco il logaritmo. Cioè a farne una funzione. Diremo allora *valore principale del logaritmo* e scriveremo $\text{Log} z$ la funzione che ha parte reale data da $\log(|z|)$ e parte immaginaria $i\vartheta$, dove ϑ è il valore principale dell'argomento di z , scelto in uno dei modi suddetti.

Consideriamo una funzione $f(z)$ che sia olomorfa all'interno di un laccio Γ , esclusione fatta per un numero finito di punti nei quali abbia poli isolati; inoltre la funzione possieda un numero finito di zeri isolati. Nessun polo o zero di $f(z)$ cada sul cammino Γ . Si ha allora

Teorema 1.11.1 *Sotto le condizioni specificate, vale*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P \quad ,$$

dove Z è il numero degli zeri, contati con la loro molteplicità, e P è il numero dei poli, contati con la loro molteplicità, interni a Γ .

Dimostrazione. Se $f(z)$ ha in a_j un polo o uno zero isolato di molteplicità m_j si potrà rappresentare come segue

$$f(z) = (z - a_j)^{m_j} f_j(z) \quad ,$$

dove $f_j(z)$ è una funzione olomorfa in un intorno di a_j . Sarà $m_j > 0$ se a_j è uno zero, $m_j < 0$ se a_j è un polo. Si avrà

$$f'(z) = m_j(z - a_j)^{m_j-1} f_j(z) + (z - a_j)^{m_j} f_j'(z) \quad .$$

E quindi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_j}{z - a_j} + \frac{f'_j(z)}{f_j(z)} .$$

La funzione $\frac{f'_j(z)}{f_j(z)}$ è olomorfa in un intorno di a_j e quindi il residuo di $\frac{f'(z)}{f(z)}$ in a_j è m_j . Ne segue che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j m_j = Z - P \quad . \quad \square$$

Possiamo scegliere, come caso particolare, $f(z) = P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $n \geq 1$. Se il cammino Γ è un cerchio di centro l'origine e raggio sufficientemente grande, esso contiene tutti gli zeri di $P_n(z)$ (sono al più n). Infatti è $\lim_{z \rightarrow \infty} |P_n(z)| = \infty$. Se percorriamo il cammino Γ in senso antiorario, percorriamo in senso orario un cammino intorno a $z = \infty$, che è un polo d'ordine n per la funzione. Si ottiene dunque

$$\frac{P'_n(z)}{P_n(z)} = \frac{n}{z} + \dots$$

Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} dz = -(-n) = n \quad .$$

Ma Γ racchiude tutti gli zeri di $P_n(z)$. E poiché $P_n(z)$ non ha poli all'interno di Γ , possiamo interpretare il risultato ottenuto dicendo che ogni polinomio di grado n ha esattamente n radici se contate con il loro ordine di molteplicità. Abbiamo ottenuto un'altra volta la dimostrazione del **teorema fondamentale dell'algebra**.

Una funzione olomorfa in un dominio aperto D tranne che per poli contenuti in D si dice talvolta una funzione *meromorfa*.

Il precedente teorema dell'indicatore logaritmico può anche porsi sotto la forma detta del **Principio dell'argomento**. Si osservi che è

$$\int_a^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \log f(z) - \log f(a) \quad ,$$

se l'integrale è esteso a un cammino semplice che congiunge a con z (per es. un segmento di retta di estremi a e z) e non ci sono né singolarità né zeri di $f(z)$ lungo tale cammino. Se l'integrale è esteso a un cammino semplice chiuso, $|f(z)|$ dopo un giro completo assume nuovamente il valore

iniziale, mentre l'argomento, in generale, sarà mutato. Se indichiamo tale variazione con $\Delta_\Gamma \arg f(z)$, si ha:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z)$$

e quindi

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = 2\pi(Z - P) \quad . \quad \square$$

In realtà abbiamo dato per scontato che si possa definire il $\log f(z)$ lungo Γ il che non è facile né immediato da riconoscere “a priori”. Però si può procedere come segue: se $a \in \Gamma(I)$, dove $I = [0, 1]$, poiché non ci sono né poli né zeri di $f(z)$ su Γ si può definire un ramo di $\log f(z)$ in una sfera aperta di centro a e raggio sufficientemente piccolo r : $B(a, r)$; basta che in tale sfera la funzione non si annulli e non abbia poli. Per ogni $a \in \Gamma(I)$, esisterà un $\varepsilon > 0$ tale che il logaritmo di $f(z)$ si possa definire in ogni $B(a, \varepsilon)$. Ora, per la compattezza del circuito e per l'uniforme continuità di $\Gamma(t)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione finita $0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ dell'intervallo I tale che $\Gamma(t) \in B(\Gamma(t_{j-1}), \varepsilon)$ per $t_{j-1} \leq t \leq t_j$. Si può definire un logaritmo in ogni sfera $B(t_j, \varepsilon)$. Infine, poiché t_j è contenuto sia nella sfera j -esima che in quella $(j+1)$ -esima si possono scegliere le determinazioni del logaritmo ℓ_1, \dots, ℓ_k in modo che sia $\ell_1(\Gamma(t_1)) = \ell_2(\Gamma(t_1))$, $\ell_2(\Gamma(t_2)) = \ell_3(\Gamma(t_2))$, \dots , $\ell_{k-1}(\Gamma(t_{k-1})) = \ell_k(\Gamma(t_{k-1}))$.

Se Γ_j è il cammino Γ ristretto a $[t_{j-1}, t_j]$, poiché $\ell'_j = \frac{f'}{f}$, si ottiene

$$\int_{\Gamma_j} \frac{f'}{f} = \ell_j(\Gamma(t_j)) - \ell_j(\Gamma(t_{j-1}))$$

per $1 \leq j \leq k$. Sommando i due membri dell'uguaglianza si ottiene finalmente

$$\int_\Gamma \frac{f'}{f} = \ell_k(a) - \ell_1(a) = 2\pi k i$$

e dunque l'argomento di $f(z)$ cambia di una quantità $2\pi k$ lungo Γ .

Diamo infine un interessante teorema dovuto a Eugène Rouché spesso utile nelle applicazioni.

Teorema 1.11.2 *Supponiamo che f soddisfi le condizione del teorema precedente e che si possa scrivere*

$$f(z) = g(z) + h(z) \quad ,$$

con $|g(z)| > |h(z)|$ sulla curva Γ . Allora si ha che la variazione dell'argomento lungo Γ di $f(z)$ è la stessa di quella di $g(z)$, e quindi che

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g \quad .$$

Dimostrazione. Vale

$$f(z) = g(z) \cdot \left\{ 1 + \frac{h(z)}{g(z)} \right\}.$$

Quando z si muove lungo Γ il quoziente $\frac{h(z)}{g(z)}$ ha modulo minore di 1, dunque se

$$w(z) = \left\{ 1 + \frac{h(z)}{g(z)} \right\},$$

$|w(z) - 1| < 1$, e quindi $|\arg(w(z))| < \frac{\pi}{2}$ poiché $w(z)$ giace nel semipiano $\Re w(z) > 0$. Ma allora $\Delta_\Gamma \arg w(z) = 0$ e quindi $\Delta_\Gamma \arg f(z) = \Delta_\Gamma \arg g(z)$ e quindi anche $Z_f - P_f = Z_g - P_g$. \square

Più in generale si può dimostrare il seguente teorema

Teorema 1.11.3 (Glicksberg, 1976). *Siano valide le condizioni precedenti sulle funzioni f e g e si supponga che su un circuito Γ non ci siano zeri o poli delle due funzioni e che inoltre sia $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ su Γ . Allora*

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g \quad .$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue che

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} + 1 \right| < \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| + 1.$$

Ciò implica che il rapporto $\frac{f(z)}{g(z)}$ non può mai assumere un valore reale $\mu \geq 0$. Infatti in questo caso si avrebbe $\mu + 1 < \mu + 1$, che è assurdo. Allora $\frac{f(z)}{g(z)}$ porta \mathbf{C} in $\mathbf{C} \setminus [0, \infty)$ e quindi si può definire una determinazione del logaritmo per $\frac{f(z)}{g(z)}$. Dunque

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)' / \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) dz = 0,$$

ossia

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) dz = (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g) = 0. \square$$

Esempio 1.11.1 *Calcolare il numero degli zeri del polinomio*

$$z^8 - z^6 + z^5 - 4,$$

all'interno della corona circolare $\{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < 2\}$.

SVOLGIMENTO. Si osservi che se $|z| = 2$ si ha $|-z^6 + z^5 - 4| \leq 2^6 + 2^5 + 4 = 100 < 2^8 = 256$. Dunque all'interno del cerchio di raggio 2 il nostro polinomio ha tante radici quante ne ha il polinomio z^8 , cioè 8. Le radici nella corona circolare sono quelle presenti nel cerchio esterno meno quelle contenute nel cerchio interno. Ma se $|z| = 1$, si ha che $|z^8 - z^6 + z^5| \leq 3 < |-4|$. Cioè il polinomio considerato non ha radici all'interno del cerchio $|z| = 1$ (o meglio, ne ha tante quante il polinomio costante 4). Dunque nella corona ci sono tutti gli 8 zeri del polinomio. \square

In modo analogo a quanto visto sopra si dimostrano i seguenti teoremi

Teorema 1.11.4 *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in D tranne che per un numero finito di poli e dotata di un numero finito di zeri. Sia $g(z)$ olomorfa in D e sia Γ un circuito che non passa per gli zeri o i poli di f . Allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g \frac{f'}{f} dz = \sum_{k=1}^n g(z_k) n_k - \sum_{r=1}^m g(p_r) m_r,$$

dove n_k sono le molteplicità degli zeri z_k e m_r gli ordini dei poli p_r della funzione $f(z)$ all'interno di Γ . \square

In particolare se $g(z) = z$ e $f(z)$ è olomorfa in un aperto contenente il disco chiuso $\overline{B(a, r)}$ e iniettiva nel disco allora il valore dell'inversa si può calcolare come segue se $\Omega = f(B(a, r))$, $\alpha \in \Omega$ e Γ è il cerchio $|z - a| = r$:

$$f^{-1}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z f'(z)}{f(z) - \alpha} dz \quad .$$

1.11.1 L'indice di avvolgimento.

Finora in tutte le formule integrali stabilite abbiamo implicitamente supposto che ogni curva semplice chiusa rettificabile "girasse" una sola volta intorno a ogni suo punto interno, e nessuna volta intorno ai suoi punti esterni. Il teorema che segue dice sostanzialmente che ogni curva rettificabile chiusa gira o s'avvolge un numero intero di volte intorno a ogni punto che non appartenga al suo sostegno.

Teorema 1.11.5 *Se $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ è una curva chiusa rettificabile e $a \notin \Gamma(I)$ allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a}$$

è un numero intero.

Dimostrazione. È sufficiente considerare il caso di Γ curva liscia. In questo caso si può definire

$$g(t) = \int_0^t \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s) - a} ds \quad .$$

Allora si ottiene $g(0) = 0$ e $g(1) = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a}$. Vale inoltre

$$g'(t) = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - a} \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1 \quad .$$

Ma allora

$$\frac{d}{dt} e^{-g}(\Gamma - a) = e^{-g} \left[\Gamma' - \frac{\Gamma'}{\Gamma - a} (\Gamma - a) \right] = 0.$$

Dunque $e^{-g}(\Gamma - a)$ è costante e quindi $e^{-g(0)}(\Gamma(0) - a) = \Gamma(0) - a = e^{-g(1)}(\Gamma(1) - a)$. Poiché $\Gamma(0) = \Gamma(1)$ si deduce che $e^{-g(1)} = 1$. Ossia che $g(1) = 2\pi i k$ per qualche intero k . \square

Definizione. Il numero

$$n(\Gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a}$$

si dice il *numero d'avvolgimento* o *indice* di Γ rispetto al punto $a \notin \Gamma(I)$. È facile riconoscere che se Γ e Δ sono due curve chiuse rettificabili con i medesimi punti iniziali e a non appartiene al sostegno delle due curve, allora

$$(a) \quad n(\Gamma; a) = -n(-\Gamma; a);$$

$$(b) \quad n(\Gamma + \Delta; a) = n(\Gamma; a) + n(\Delta; a).$$

Tenendo conto del numero d'avvolgimento il teorema integrale di Cauchy potrà allora essere formulato in modo generale come segue

Teorema 1.11.6 *Sia f una funzione olomorfa su $D \subset \mathbb{C}$. Se Γ è una curva chiusa rettificabile in D tale che $n(\Gamma; w) = 0$ per ogni $w \in \mathbb{C} \setminus D$, allora per ogni $a \in D \setminus \Gamma(I)$ si ha*

$$n(\Gamma; a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz \quad .$$

1.12 Serie di Residui.

Nel paragrafo 1.10 abbiamo definito il valore principale di un integrale su tutta la retta reale

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx \quad ,$$

quando la funzione $f(x)$ sia integrabile su ogni intervallo limitato della retta reale. Se la funzione $f(z)$ ha un numero finito di singolarità nel semipiano superiore o inferiore, sotto opportune ipotesi, il valore principale dell'integrale è la somma dei residui nelle singolarità. Ci chiediamo se questo procedimento si possa estendere al caso in cui ci siano infinite singolarità nel semipiano superiore o inferiore. In questo caso la somma del numero finito dei residui sarà sostituita dalla loro serie.

Supponiamo dunque che $f(z)$ sia olomorfa nel semipiano $z \geq 0$ fatta eccezione per una successione di punti $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$, con $\Im(z_k) > 0$, che supporremo enumerati in modo che $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_k| \leq \dots$ e tali che $|z_k| \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$. Sia $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$ una successione di raggi diversi da tutti i valori di $|z_k|$ e divergente a $+\infty$. Sia poi Γ_k il cammino formato dal segmento $[-R_k, R_k]$ sull'asse reale e dal semicerchio C_k di raggio R_k del semipiano superiore. Sia infine n_k un intero tale che $|z_{n_k}| < R_k < |z_{n_k+1}|$. Allora per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\Gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{r=1}^{n_k} R(f; z_r) \quad ,$$

ossia

$$\int_{-R_k}^{R_k} f(x) dx = 2\pi i \sum_{r=1}^{n_k} R(f; z_r) - \int_{C_k} f(z) dz \quad .$$

Se accade che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[R_k \cdot \max_{z \in C_k} |f(z)| \right] = 0 \quad ,$$

allora il valore dell'integrale esteso al semicerchio nel semipiano superiore tende a zero. Se inoltre sappiamo che converge la serie dei residui, possiamo concludere che esiste l'integrale su \mathbf{R} in un senso che estende quello del valore principale secondo Cauchy e si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-R_k}^{R_k} f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} R(f; z_n) \quad .$$

Dunque abbiamo dimostrato il teorema

Teorema 1.12.1 *Se $f(z)$ è olomorfa in $\Im z \geq 0$ fatta eccezione per i punti $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, con $\Im(z_k) > 0$ e $|z_k| \rightarrow \infty$, se $\sum_{n=0}^{+\infty} R(f; z_n)$ converge e se esiste una successione di raggi $R_k \rightarrow \infty$ diversi da ogni $|z_n|$ e tali che $\lim_{k \rightarrow \infty} [R_k \cdot \max_{z \in C_k} |f(z)|] = 0$, allora*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-R_k}^{R_k} f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} R(f; z_n) \quad .$$

Analogamente si può dimostrare il teorema

Teorema 1.12.2 *Se $f(z)$ è olomorfa in $\Im z \leq 0$ fatta eccezione per i punti $z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \dots$, con $\Im(z'_k) < 0$ e $|z'_k| \rightarrow \infty$, se $\sum_{n=0}^{+\infty} R(f; z'_n)$ converge e se esiste una successione di raggi $R_k \rightarrow \infty$ diversi da ogni $|z'_n|$ e tali che $\lim_{k \rightarrow \infty} [R_k \cdot \max_{z \in C'_k} |f(z)|] = 0$, dove C'_k è il semicerchio con $\Im(z) \leq 0$ di raggio R_k , allora*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-R_k}^{R_k} f(x) dx = -2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} R(f; z'_n) \quad .$$

Se le condizioni di entrambi i teoremi sono soddisfatte, e la stessa successione di R_k è utilizzabile nei due casi, allora l'integrale si può eliminare e trovare che la somma delle due serie dei residui è nulla. In quest'ultimo caso si può anche rinunciare alla richiesta che le singolarità abbiano parte reale non nulla. Ciò può essere utilizzato per calcolare la somma di certe serie, come mostreremo nell'esempio 1.12.2.

1.12.1 ESEMPLI.

Esempio 1.12.1 *Sia $f(z) = \frac{1}{(1+z^2) \cosh z}$.*

Questa funzione ha poli nel semipiano superiore nei punti $z = i, \frac{\pi}{2}i, \frac{3\pi}{2}i, \frac{5\pi}{2}i, \dots$. Si prenda $R_k = k\pi, k = 1, 2, \dots$. Si può osservare che

$$|\cosh z|^2 = |\cosh(x+iy)|^2 = |\cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \sin y|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \quad .$$

Si noti inoltre che per $(k - \frac{1}{4})\pi \leq y \leq k\pi$, $\cos^2 y \geq \frac{1}{2}$, mentre per $y < (k - \frac{1}{4})\pi$ e $|z| = k\pi$

$$|x| > \sqrt{k^2\pi^2 - (k - \frac{1}{4})^2\pi^2} = \pi\sqrt{\frac{1}{2}k - \frac{1}{16}} > \frac{\pi}{4}\sqrt{7} \quad ,$$

cosicché $\sinh^2 x > \frac{1}{2}$. Dunque su C_{R_k}

$$\cos^2 y + \sinh^2 x \geq \frac{1}{2} \quad .$$

Allora

$$\max_{C_{R_k}} |f(z)| \leq \frac{\sqrt{2}}{|R_k^2 - 1|} \quad ,$$

e dunque la condizione sul limite per $k \rightarrow \infty$ è soddisfatta. Per il calcolo dei residui si trova:

$$R(f; i) = \frac{1}{2i \cosh i} = \frac{1}{2i \cos 1} \quad ,$$

e

$$R(f; (n - \frac{1}{2})\pi i) = \frac{1}{[1 - (n - \frac{1}{2})^2 \pi^2] \sinh(n - \frac{1}{2})\pi i} = \frac{(-1)^n}{i[(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2 - 1]} \quad .$$

Finalmente si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \cosh x} = \frac{\pi}{\cos 1} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2 - 1} \quad .$$

Esempio 1.12.2 Calcolare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$, $a > 0$.

Conviene considerare la funzione $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)} \cot(\pi z)$ che ha poli semplici nei punti $z = \pm ia$ e in $z = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Si trova che i residui sono dati da

$$R(f; ia) = \frac{1}{2ia} \cot(\pi ia) = -\frac{1}{2a} \coth \pi a \quad ,$$

$$R(f; -ia) = -\frac{1}{2ia} \cot(-\pi ia) = -\frac{1}{2a} \coth \pi a \quad ,$$

$$R(f; n) = \frac{1}{\pi(n^2 + a^2)} \quad .$$

Conviene scegliere $R_k = k + \frac{1}{2}, k = 1, 2, \dots$, supponendo che tutti questi raggi siano diversi da $|a|$. (Altrimenti si salterà uno dei raggi.) Si osservi inoltre che

$$|\cot \pi z|^2 = \frac{\cos^2 \pi x + \sinh^2 \pi y}{\sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y} \quad .$$

Ora, per $k + \frac{1}{4} \leq |x| \leq k + \frac{1}{2}$ vale $\cos^2 \pi x \leq \sin^2 \pi x$, cosicché $|\coth \pi z| \leq 1$. D'altra parte per $|x| < k + \frac{1}{4}$ e $|z| = k + \frac{1}{2}$, si ha

$$|y| > \sqrt{(k + \frac{1}{2})^2 - (k + \frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{k}{2} + \frac{3}{16}} \geq \frac{\sqrt{11}}{4} \quad ,$$

e quindi

$$|\cot \pi z|^2 \leq \frac{1 + \sinh^2 \frac{\pi}{4} \sqrt{11}}{\sinh^2 \frac{\pi}{4} \sqrt{11}} = K^2 \quad .$$

Dunque, per $|z| = R_k$, si ha

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|R_k^2 - a^2|} \quad ,$$

e quindi è soddisfatta la condizione all'infinito. Finalmente

$$-\frac{1}{a} \coth \pi a + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(n^2 + a^2)} = 0 \quad .$$

Cioè

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a \quad .$$

Per ragioni di simmetria si trova poi facilmente

$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2} \quad .$$

Può essere interessante osservare che $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Poichè la somma della serie è funzione continua di a si trova finalmente che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad .$$

Per la valutazione della serie abbiamo tenuto conto che la funzione $\pi \cot \pi z$ ha poli con residui 1 in tutti gli interi $n \in \mathbf{Z}$. Si possono sommare serie a termini di segno alternato tenendo presente che $\pi \csc(\pi z)$ ha poli in $n \in \mathbf{Z}$, con residui $(-1)^n$. Si considerino i seguenti ulteriori esercizi

Esercizio 1.12.1 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(2 + \cos x)(1 + x^2)}$$

come somma di una serie.

Esercizio 1.12.2 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(1 + x^4) \sinh x}$$

come somma di una serie.

Esercizio 1.12.3 *Calcolare*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^4} \quad ,$$

utilizzando i residui della funzione $\frac{\cot \pi z}{1+z^4}$.

Esercizio 1.12.4 *Calcolare*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^4} \quad .$$

Esercizio 1.12.5 *Calcolare*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} \quad ,$$

per $0 < a < 1$, utilizzando i residui della funzione $\frac{\coth \pi z}{z^2 + a^2}$.

1.13 Prolungamento analitico.

Quanto stiamo per esporre è basato su considerazioni non completamente formalizzate, ma che riteniamo utili per fornire una trattazione intuitiva dell'argomento. Un primo approccio a una trattazione formalmente più precisa e astratta si può trovare, per esempio nel libro di J.B. Conway "Functions of one complex variable", Springer Verlag. Ricordiamo le considerazioni già fatte a proposito del teorema 1.8.1 di Weierstrass. Se supponiamo di avere una funzione olomorfa $f(z)$ che sappiamo definita su un dominio aperto connesso D e se ne conosciamo i valori in un intorno di un punto $a \in D$, possiamo trasportare i suoi valori in un arbitrario punto $b \in D$. Consideriamo infatti un cammino continuo e rettificabile in D , Γ , che congiunge a con b . Diciamo ρ la distanza tra il sostegno di Γ e la frontiera ∂D di D . Per ogni punto $z_0 \in \Gamma(I)$ la funzione $f(z)$ è sviluppabile in serie di potenze avente raggio di convergenza $R_0 \geq \rho$. Poiché $\Gamma(I)$ è compatto, un numero finito di cerchi di raggi $R_k \geq \rho$ e centri z_k , $k = 1, 2, \dots, n$, $z_0 = a, z_n = b$ coprirà $\Gamma(I)$. Potremo scegliere i punti in modo che $z_{k+1} \in B(z_k, R_k)$, dove $B(z_k, R_k)$ rappresenta il disco di centro z_k e raggio R_k . Allora, noto lo sviluppo in serie di $f(z)$ in $B(z_0, R_0)$, potremo calcolare $f^{(m)}(z_1)$, $m = 0, 1, \dots$ e quindi conoscere lo sviluppo in serie di $f(z)$ in $B(z_1, R_1)$, e così via fino a ottenere una completa conoscenza di f e di tutte le sue derivate in $b = z_n$. Dunque, ammesso di sapere che $f(z)$ è

definita in D e di conoscerne i valori in un intorno di a , possiamo valutarla in un altro punto arbitrario $b \in D$.

Supponiamo ora di avere solo una conoscenza parziale di una funzione oloomorfa. Precisamente di conoscerla solamente in un intorno di un punto z_0 . Ci proponiamo di usare la precedente idea per vedere se il suo valore si possa estendere a un insieme aperto connesso di \mathbf{C} più ampio dell'intorno di partenza. Precisamente diremo *elemento di funzione analitica* la coppia (f, G) dove f è una funzione oloomorfa definita in un aperto connesso G ; il caso "minimo" che dobbiamo aspettarci è che f sia la somma di una serie di potenze e G sia il suo cerchio di convergenza $B(z_0, R_0)$. Supponiamo che, preso un punto $z_0 \in G$ e un cammino Γ che congiunge z_0 con un punto $b \in \mathbf{C}$, esistano un numero finito di punti $z_0, z_1, \dots, z_n = b$ di Γ come nella situazione precedente; cioè che $z_1 \in B(z_0, R_0)$ dove f è sviluppabile in serie di potenze; che la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_1)}{m!} (z - z_1)^m$ abbia raggio di convergenza $R_1 > 0$ e che $z_2 \in B(z_1, R_1)$; ...; che $b = z_n \in B(z_{n-1}, R_{n-1})$ nel quale converge la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_{n-1})}{m!} (z - z_{n-1})^m$. Allora l'elemento di funzione analitica (f_b, G_b) , dove $f_b(z)$ è una funzione che prolunga il valore della somma della serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_n)}{m!} (z - z_n)^m$, con $z_n = b$, a un aperto connesso $G_b \supset B(b, R_n)$, si dirà il prolungamento analitico (o continuazione analitica) dell'elemento (f, G) al punto b lungo il cammino Γ . Dato un elemento analitico (f_0, G_0) , consideriamo tutti i punti b del piano complesso ai quali quell'elemento analitico si può estendere lungo un opportuno cammino Γ . *Se siamo fortunati*, otterremo allora una funzione analitica formata dai prolungamenti analitici dell'elemento (f_0, G_0) così definita: il dominio della funzione è l'aperto connesso

$$D = \cup \{G_b: (f_0, G_0) \text{ è estendibile a un elemento } (f_b, G_b)\} \quad ;$$

se $z \in G_b \subset D$, allora $f(z) = f_b(z)$. Più avanti spiegheremo cosa significhi "se siamo fortunati". Per stabilire come e se si possa prolungare analiticamente un elemento, si può procedere come segue. Dato un elemento costituito dalla somma di una serie di potenze e dal suo cerchio di convergenza di raggio R_0 e centro a_0 , $(f_0(z), G_0)$, si conduca con centro in a_0 un cerchio di raggio $\frac{R_0}{2}$. Sulla frontiera di G_0 vi deve essere almeno un punto singolare. Perciò, con centro in ogni punto a del cerchio di centro a_0 e raggio $\frac{R_0}{2}$, la funzione $f_0(z)$ è sviluppabile in serie di potenze convergente in un cerchio di raggio R_a , tale che sia $\frac{R_0}{2} \leq R_a \leq \frac{3R_0}{2}$ (distanza minima e, rispettivamente, massima di a dalla frontiera di G_0). Inoltre ci sarà certamente almeno un punto a per il quale $R_a = \frac{R_0}{2}$. Se esiste a per il quale $R_a > \frac{R_0}{2}$, allora l'elemento iniziale potrà essere prolungato al di fuori del dominio iniziale G_0 . Iterando questo procedimento in tutti i modi possibili a partire dall'elemento iniziale si troverà la nostra funzione analitica.

Possono verificarsi varie situazioni, che ora brevemente esamineremo. Può accadere che l'elemento analitico non si lasci prolungare al di fuori del suo dominio iniziale G_0 ; può accadere che l'elemento analitico si lasci prolungare ad una regione D e che il valore del prolungamento di $(f_0(z), G_0)$ a (f_b, G_b) non dipenda dal particolare cammino contenuto in D , che congiunge a_0 con b . Questo è il caso che abbiamo detto fortunato. Si dirà allora di avere ottenuto, per prolungamento analitico dell'elemento $(f_0(z), G_0)$, una funzione olomorfa $f(z)$ definita sul dominio D . Infine può accadere che partendo dal medesimo elemento iniziale $(f_0(z), G_0)$ si possa giungere a un punto $b \in D$ attraverso due diversi cammini Γ_1 e Γ_2 e che per i due prolungamenti $(f_{b,\Gamma_1}(z), G_{b,\Gamma_1})$ e $(f_{b,\Gamma_2}(z), G_{b,\Gamma_2})$, risulti $f_{b,\Gamma_1}(b) \neq f_{b,\Gamma_2}(b)$. Si dirà allora che siamo in presenza di una funzione *polidroma*, ottenuta per prolungamento analitico dell'elemento iniziale $(f_0(z), G_0)$. Vedremo che i casi qui ipotizzati possono effettivamente verificarsi.

1.13.1 Elementi non prolungabili.

Esempi tipici al proposito sono le seguenti serie dette di Weierstrass:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{a^n} \quad a > 1, 0 < b < 1, \quad (W)$$

con $a \in \mathbf{N}$, dispari e tale che $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, e di Fredholm

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{n^2} \quad 0 < a < 1. \quad (F)$$

Si tratta di esempi di serie dette *lacunari*. Così sono dette le serie nelle quali i termini della serie diversi da zero sono "rari". Precisamente si dicono lacunari le serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k} \quad ,$$

per le quali vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k} = 0 \quad .$$

Nel caso della serie (W) gli $a_m \neq 0$ hanno $m = a^n$; per la serie (F), si ha $a_m \neq 0$ per $m = n^2$. Nel caso della serie (F) il raggio di convergenza è $R = 1$. Infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n+1} z^{(n+1)^2}}{a^n z^{n^2}} \right| = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^{2n+1} \quad .$$

Il limite è < 1 se $|z| \leq 1$. Precisamente il limite è 0 se $|z| < 1$; è $a < 1$ se $|z| = 1$. È $+\infty$ se $|z| > 1$. Dunque la serie converge e ha per somma una funzione continua in tutti i punti del cerchio di centro l'origine e raggio 1 , compresi i punti della frontiera. Un teorema generale dovuto a E. Fabry (1896) assicura che le serie lacunari non sono prolungabili oltre la loro circonferenza di convergenza. In questo caso la circonferenza di convergenza si dice una *frontiera naturale* per l'elemento analitico. Nel caso della serie (W) , Weierstrass dimostrò nel 1880 che essa non è continuabile facendo vedere che la parte reale della sua somma non è una funzione differenziabile dell'arco su $|z| = 1$. Invece per la serie (F) si ha che essa è non continuabile benché $h(\vartheta) = f(e^{i\vartheta})$ sia di classe C^∞ rispetto a ϑ .

1.13.2 Caso della monodromia.

Sia Γ un cammino che parte da un punto $a \in B(a, R_0) \subset G$ e arriva a un punto $b \notin B(a, R_0)$ lungo il quale sia prolungabile un elemento analitico $f(z)$. Tale prolungamento si sviluppi attraverso i punti z_1 nel quale Γ esce da $B(a, R_0)$, centro di un disco di raggio R_1 , $B(z_1, R_1)$, z_2 nel quale Γ esce da $B(z_1, R_1)$, centro di un disco di raggio R_2 , $B(z_2, R_2)$, eccetera, fino a raggiungere il punto b . Abbiamo supposto che tutti i punti scelti z_1, z_2, z_3, \dots non siano singolari. È chiaro che al posto dei dischi $B_0 = B(a, R_0), B_1 = B(z_1, R_1), B_2, \dots$ avremmo potuto scegliere altri dischi B'_0, B'_1, B'_2, \dots di centri a, z'_1, z'_2, \dots purché il disco di centro z'_k contenga la porzione d'arco $\overline{z'_k z'_{k+1}}$. Ora i dischi B_0, B_1, \dots, B_n coprono il sostegno di Γ , ma anche un intorno aperto di esso. Se Γ' ha gli stessi estremi e il sostegno è contenuto in $\cup_{k=1}^n B_k$, allora per il teorema di Weierstrass sull'identità delle funzioni analitiche, il prolungamento di (f_0, B_0) lungo Γ fino a b dà lo stesso risultato del prolungamento dell'elemento lungo Γ' .

Più in generale può essere dimostrato il seguente teorema (del quale ometteremo la prova)

Teorema 1.13.1 [Teorema di Monodromia.] *Se D è un aperto connesso e semplicemente connesso, se $a \in D$ e se un elemento analitico (f, G) con $a \in G \subset D$ può essere continuato analiticamente lungo ogni cammino in D , allora i suoi prolungamenti definiscono una funzione olomorfa in D .*

Supponiamo ora che, per quanto venga prolungato il procedimento descritto, non si possa trovare un cerchio che racchiuda una porzione di Γ al di là di un certo punto. In questo caso i punti nei quali Γ esce dai dischi B_k , diciamoli z_{k+1} si accumulano verso un certo punto ξ . Tale punto si dirà un punto singolare. Esso potrà eventualmente essere il punto b o un punto di Γ compreso tra a e b . La natura del punto singolare ξ potrà essere quello di un polo o di una singolarità essenziale, che già abbiamo incontrato, o

potrà essere di natura diversa, come quella di un punto di *diramazione*, o una sovrapposizione di punti dei tipi detti.

1.13.3 Caso della polidromia.

Per spiegare la natura di un punto di diramazione, consideriamo il caso delle funzioni $\sqrt{1+z}$ e $\log(1+z)$. Se partiamo dal punto $a = 0$ un elemento analitico della funzione $\sqrt{1+z}$ è rappresentato dalla somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^n .$$

Questa serie ha raggio di convergenza $R = 1$. Se si sviluppa in serie a partire da un punto $-1 < z_0 < 0$ del segmento dell'asse reale congiungente 0 con -2 , il raggio di convergenza della serie corrispondente è $z_0 + 1$ e dunque tende a 0 se $z_0 \rightarrow -1$. Dunque il punto -1 è singolare e non si può arrivare a superarlo lungo il segmento dell'asse reale. Se invece si segue l'andamento dei cerchi di convergenza della serie lungo una circonferenza di centro -1 e raggio 1, si vede che con centro nei punti $c = -1 + e^{i\vartheta}$ il raggio di convergenza della serie è sempre $R_c = 1$. Seguendo il cammino del semicerchio superiore ($0 \leq \vartheta \leq \pi$) si arriva nel punto -2 con l'elemento di funzione analitica che vale $\sqrt{2} \cdot i$. Seguendo invece il cammino nel semipiano inferiore ($0 \geq \vartheta \geq -\pi$) si perviene a un elemento che in -2 vale $-\sqrt{2} \cdot i$. Un fenomeno analogo si verifica per la funzione $\log(1+z)$. Quando a partire da un elemento di funzione analitica, si arriva, congiungendo un punto a con un punto b attraverso due cammini distinti Γ_1 e Γ_2 , a due elementi analitici diversi, si dice che si è in presenza di una funzione *polidroma* o *a più valori*. Si dice anche che si è in presenza di più *rami* o *determinazioni* della funzione. Si può infine dimostrare che, quando due cammini Γ_1 e Γ_2 da a a b conducono a differenti elementi in b , allora vi è almeno un punto singolare nella regione interna al cammino chiuso $\Gamma_1 + (-\Gamma_2)$. Infatti questa è sostanzialmente l'affermazione del Teorema di Monodromia, già ricordato.

1.13.4 Qualche esempio di funzione polidroma

Presenteremo ora, anche se in modo non completamente soddisfacente dal punto di vista logico, lo studio di alcune funzioni polidrome e delle loro cosiddette *superficie di Riemann*. Una trattazione più precisa potrebbe essere fatta introducendo, per esempio, le nozioni di *germe di funzione analitica*, di *funzione analitica completa* e di *fascio dei germi di funzioni analitiche su un aperto G* (si veda il citato libro di J. B. Conway). I limiti di

questo corso, dedicato agli studenti d'ingegneria, sconsigliano di entrare nei dettagli di queste considerazioni. Consideriamo dunque in \mathbf{C} l'equazione

$$w^2 - z = 0;$$

se $z = r \cdot e^{i\varphi}$ allora le due soluzioni dell'equazione sono $w_1 = \sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}$ e $w_2 = \sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2} + \pi} = -\sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Questo non è drammatico perché anche nel campo reale, se $z \geq 0$ ci sono due soluzioni $w_1 = \sqrt{z}$ e $w_2 = -\sqrt{z}$. Potremmo prendere atto che ci sono due soluzioni e scegliere una delle due, per es. $w_1(z)$, come definizione di *radice del numero complesso* z . Purtroppo, ciò funziona nel campo reale, ma non nel campo complesso. Vediamo perché. Immaginiamo di scegliere un certo punto $z \neq 0$ e di percorrere un giro lungo una circonferenza di centro l'origine e raggio $r = |z|$. Se scegliamo come radice di z il numero $w_1(z)$, quando avremo percorso un intero giro della nostra circonferenza l'argomento di z sarà aumentato di 2π e quindi il valore di $w_1(z)$ prolungato per continuità lungo la circonferenza sarà $\sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} = -\sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}$, cioè sarà coincidente con il valore di $w_2(z)$ prima dell'inizio del giro. Dunque facendo un giro intorno all'origine i valori di $w_1(z)$ e di $w_2(z)$ si scambiano fra di loro e non è possibile perciò attribuire a uno dei due un significato privilegiato. Si può tentare di rimediare alla cosa procedendo come segue: si considerino due copie del piano complesso e si faccia un "taglio" lungo l'asse reale negativo, per es., fino allo zero. I due piani saranno detti rispettivamente piano 1 e piano 2. Il piano 1 si può rappresentare come $\mathbf{C}_1^* = \{(z, 1) : z = \rho \cdot e^{i\varphi}, \pi > \varphi \geq -\pi\}$ e il piano 2 come $\mathbf{C}_2^* = \{(z, 2) : z = \rho \cdot e^{i\varphi}, \pi > \varphi \geq -\pi\}$. Ai punti di $(z, 1) \in \mathbf{C}_1^*$ sono assegnati i valori $w_1(z)$ ai punti $(z, 2) \in \mathbf{C}_2^*$ sono assegnati i valori $w_2(z)$. In questo modo ai punti di una superficie sconnessa formata dall'unione dei due piani complessi "tagliati" sono biunivocamente assegnati i valori complessi delle soluzioni dell'equazione $w^2 - z = 0$ e non può esserci il "mescolamento" delle determinazioni della radice. Tuttavia, rimangono alcuni aspetti spiacevoli come la sconnessione della superficie unione dei due piani e il fatto che due punti vicini su un piano della superficie possano avere valori molto diversi della radice. Infatti se ci si muove sul piano 1 dal punto $(z_0, 1)$ con $z_0 = 1$ lungo una semicirconferenza nel semipiano superiore fino a raggiungere un punto $(z_1, 1)$ prossimo a $(-1, 1)$, l'aumento dell'argomento essendo π , il valore di $w_1(z_1) \approx i$, mentre se ci si avvicina lungo una semicirconferenza nel semipiano inferiore a $(-1, 1)$, essendo l'aumento dell'argomento $-\pi$, $w_1(e^{-\frac{\pi}{2}i}) = -i$. Due punti che se non ci fosse il "taglio" nel piano sarebbero molto vicini hanno due valori che presentano un "salto" di $2i$. Lo stesso accade nel semipiano \mathbf{C}_2^* : per il punto $(z_1, 2)$ prossimo a $(-1, 2)$ il valore di $w_2(z_1) \approx -i$, mentre in $(-1, 2)$ il valore di $w_2(-1) = i$. L'idea intuitiva alla base della nozione di super-

ficie di Riemann per \sqrt{z} è di saldare il bordo superiore del piano 1 con quello inferiore del piano 2 e viceversa. Così i valori di $w_1(z)$ si mutano con continuità in quelli di $w_2(z)$ e viceversa. Facendo una simile operazione di “sutura” c’è una linea di autointersezione che non ha significato e che in realtà non esiste. Infatti un’idea migliore della situazione è fornita dal supporre che un intorno di un punto $(z, 1)$, con $z < 0$ sia dato da un dischetto di raggio ε che per $-\pi \leq \varphi \leq 0$ sta nel piano \mathbf{C}_1^* , mentre per $0 < \varphi < \pi$ sta in \mathbf{C}_2^* . Il punto 0 ha un intorno formato da un doppio dischetto che si intreccia sui due piani, mentre i punti che non stanno sul semiasse negativo o lo zero, (z_0, k) , hanno sul loro piano un intorno formato dagli usuali dischetti $B(z_0, \varepsilon) = \{(z, k): |z - z_0| < \varepsilon\}$, ($k = 1, 2$). A questo punto non è più necessario distinguere i due piani. Scelto un valore iniziale dell’argomento per un punto $z \in \mathbf{C}$, per esempio $-\pi \leq \arg(z) < \pi$ e un valore della sua radice quadrata, per es. $w_1(z)$, seguendo la variazione, in modo continuo, di z sulla superficie di Riemann della radice, si trovano correttamente i valori della radice sulle singole falde della superficie. Dopo due giri intorno all’origine si ritorna al valore iniziale della radice. L’origine e il punto all’infinito del piano complesso si dicono *punti di diramazione algebrica*, in questo caso di *ordine 2*. Un taglio fatto lungo una qualsiasi semiretta congiungente l’origine con ∞ non permette che ci sia un mescolamento delle determinazioni della radice. Una superficie di Riemann per la radice si ottiene suturando nel modo sopra descritto i due piani. La figura che segue dà un’idea degli intorni di un punto lungo il taglio dei due piani sovrapposti.

Consideriamo l’equazione

$$w^n = z \quad .$$

Se $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$, essa ha soluzioni $w_1(z) = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\vartheta}{n}}$, $w_2(z) = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\vartheta+2\pi}{n}}$, ..., $w_n(z) = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\vartheta+2(n-1)\pi}{n}}$. Per costruire la superficie di Riemann della radice n -esima, converrà partire da n copie del piano complesso \mathbf{C} tagliato lungo il semiasse reale negativo: \mathbf{C}_1^* , \mathbf{C}_2^* , ..., \mathbf{C}_n^* . Dopo avere percorso lungo il piano 1 un semicerchio di raggio 1, per es., e di ampiezza π , si arriverà a un valore prossimo a $e^{i\frac{\pi}{n}}$ che è il valore che si ottiene movendosi nel piano 2 lungo un semicerchio di raggio 1 con ampiezza $-\pi$. Ciò si ripeterà sui bordi dei piani 3, 4, ..., n . Si potranno perciò suturare i piani come indicato nella Figura 8, generalizzando quanto è stato fatto per la radice quadrata. I punti che stanno sul bordo avranno intorni fondamentali di tipo sferico formati da una metà disco giacente sullo stesso piano e per l’altra metà sul piano ciclicamente successivo (con ciò intendiamo che il piano successivo al piano n è il piano 1). In questo modo, partendo con una determinazione della radice su un piano qualsiasi, considerando le variazioni continue dell’argomento nella rotazione intorno all’origine, le varie



Figura 1.7: Intorno di un punto sul semiasse negativo. Superficie di Riemann per la radice quadrata.

determinazioni della radice automaticamente verranno assegnate in modo corretto sulle varie falde della superficie. Dopo n giri intorno all'origine, si tornerà alla determinazione iniziale sulla falda di partenza.

La figura che segue mostra le connessioni tra le falde della superficie di Riemann nel caso della radice quadrata e della radice n -esima. Il punto origine $z = 0$ e il punto all'infinito sono punti di diramazione algebrica d'ordine n nel caso della radice n -esima.

L'equazione

$$e^w = z,$$

come sappiamo, ha infinite soluzioni del tipo $w_k(z) = \log(\rho) + i \arg(z) + k2\pi i$ se $z \neq 0$ ha $\rho > 0$ come modulo e $\arg z$ come argomento. Qui si dovranno considerare infinite copie del piano complesso tagliato lungo il semiasse negativo \mathbf{C}_k^* e per avere un'idea della superficie di Riemann del logaritmo converrà suturare ogni piano k -esimo con quello $(k + 1)$ -esimo come si è fatto in precedenza. La superficie che si ottiene ha infinite falde. Continuando a ciclare intorno all'origine si passa a nuove falde a ogni giro. Per tornare a una falda già toccata l'unica possibilità è quella di invertire la direzione di rotazione. L'origine e $z = \infty$ sono in questo caso *punti di diramazione trascendenti*, di ordine infinito. Naturalmente le complicazioni non si limitano a questi semplici casi. Per esempio $w = z^\alpha = e^{\alpha \cdot \log z} = e^{\alpha \cdot (\log(\rho) + i \arg(z) + k2\pi i)}$, è tale che il suo valore viene moltiplicato per un fattore $e^{\alpha 2\pi i}$, in generale $\neq 1$ se α non è razionale, ogni volta che si compie un ciclo intorno all'origine. Ai punti di diramazioni possono sovrapporsi

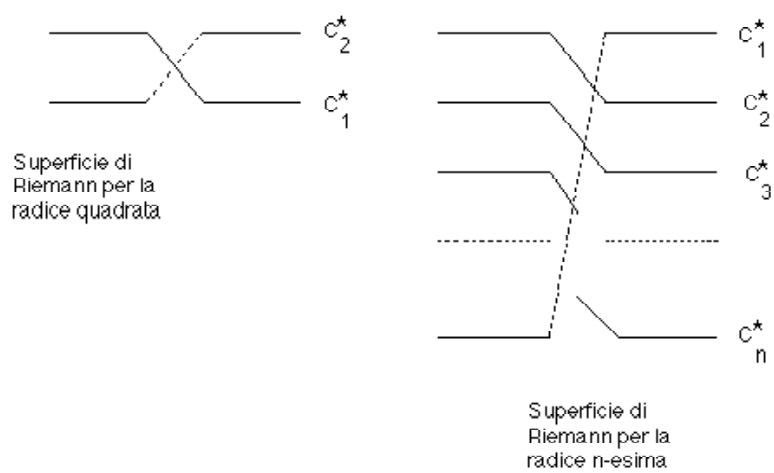


Figura 1.8: Superficie di Riemann per la radice quadrata e per la radice n -esima.

singularità di tipo polare, o singularità essenziali, o punti d'accumulazione di singularità, e così via complicando...

1.13.5 ESERCIZI

Utilizzando le considerazioni svolte sulle funzioni polidrome, si valutino alcuni tipici integrali quali i seguenti

Esercizio 1.13.1 *Si calcoli*

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx, \text{ con } 0 < p < 1 \quad .$$

SVOLGIMENTO: Si consideri la funzione $f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z}$ che ha un polo in $z = -1$ e un punto di diramazione (in generale trascendente se p non è razionale) in $z = 0$. Considereremo il cammino $\Gamma_{\varepsilon,R}$ costituito da due circonferenze di centro l'origine e raggi ε e R , ($R > 1$) e da due segmenti congiungenti ε con R , Γ_1 e Γ_2 , come nella figura che segue. Abbiamo allora

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 2\pi i R(f; -1).$$

Ma

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + e^{2\pi i(p-1)} \int_R^\varepsilon \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_{C_\varepsilon} f(z) dz + \int_\varepsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx.$$

Dunque, scrivendo nell'ordine corretto gli estremi d'integrazione,

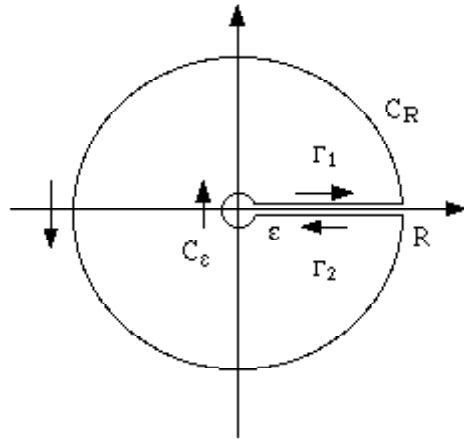
$$(1 - e^{2\pi i(p-1)}) \int_\varepsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i e^{\pi i(p-1)},$$

poiché, essendo $-1 = e^{\pi i}$ nel campo d'integrazione considerato, il residuo di $f(z)$ in -1 vale $e^{\pi i(p-1)}$. Si vede poi agevolmente che quando $R \rightarrow \infty$, l'integrale esteso a C_R tende a zero come $R^{(p-1)}$ e quando $\varepsilon \rightarrow 0$, l'integrale esteso a C_ε tende a zero come ε^p . Perciò prendendo i limiti per $R \rightarrow \infty$ e per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$(1 - e^{2\pi i(p-1)}) \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{\pi i(p-1)},$$

e quindi

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i}{e^{-\pi i(p-1)} - e^{\pi i(p-1)}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi(p-1)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(p\pi)}. \quad \square$$

Figura 1.9: Cammino d'integrazione $\Gamma_{\varepsilon,R}$.

Esercizio 1.13.2 *Si calcoli*

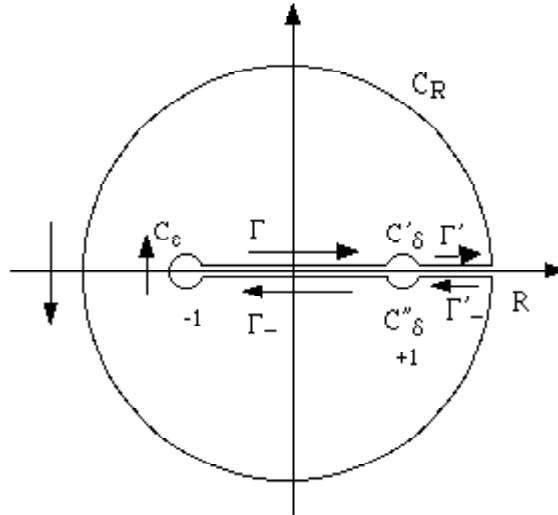
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} \text{ con } a \notin [-1, 1] \quad .$$

SVOLGIMENTO: Supporremo per semplicità che $a \not\asymp 1$. Quindi che se a è reale sia un numero < -1 . La trattazione per $a > 1$ si farà con lo stesso metodo, ma il cammino d'integrazione andrà opportunamente modificato. Dunque $f(z)$ è una funzione dotata di un polo semplice in $z = a$ e di due punti di diramazione algebrici d'ordine 2 in $z = \pm 1$. Se nel piano della variabile z eseguiamo un taglio da -1 a 1 , impediamo a z di circolare intorno ai punti $z = -1$ e $z = 1$ e quindi limitiamo gli argomenti di $z-1$ e di $z+1$ ai valori $0 \leq \arg(z-1) < 2\pi$ e $0 \leq \arg(z+1) < 2\pi$. Il cammino d'integrazione $\Gamma_{\varepsilon,\delta,R}$ è quello mostrato nella figura seguente.

Sul cammino considerato integreremo la funzione $f(z) = \frac{1}{(z-a)\sqrt{z^2-1}}$. Il residuo della funzione in $z = a$ è dato da $R(f, a) = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ e l'argomento di $a^2 - 1$ va accuratamente determinato nel campo considerato. Dunque

$$\int_{C_R} f(z) dz + \int_{\Gamma'_-} + \int_{C''_\delta} + \int_{\Gamma_-} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{\Gamma} + \int_{C'_\delta} + \int_{\Gamma'} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-1}}.$$

È facile riconoscere che gli integrali lungo i cammini Γ' e Γ'_- si elidono. Infatti lungo Γ' $z^2 - 1$ ha modulo $x^2 - 1$ e argomento 0; lungo Γ'_- il modulo

Figura 1.10: Cammino d'integrazione $\Gamma_{\varepsilon, \delta, R}$.

è ancora $x^2 - 1$, mentre l'argomento è 4π . I contributi, calcolati lungo due cammini orientati in senso opposto si cancellano. Lungo Γ_- , $z - 1$ ha modulo $1 - x$ e argomento π ; $z + 1$ ha modulo $x + 1$ e argomento 2π . Dunque $\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{1 - x^2} \cdot e^{\frac{3\pi}{2}}$ lungo Γ_- . Invece lungo Γ si ha, con considerazioni analoghe, $\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{1 - x^2} \cdot e^{\frac{\pi}{2}}$. Tenuto conto di ciò abbiamo

$$\int_{C_R} f(z) dz + \int_{C''_\delta} + e^{-\frac{3\pi}{2}} \int_{1-\delta}^{-1+\varepsilon} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} + \int_{C_\varepsilon} +$$

$$+ e^{-\frac{\pi}{2}} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} + \int_{C'_\delta} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Con considerazioni già fatte più volte, si riconosce che per $R \rightarrow \infty$ tende a zero $\int_{C_R} f(z) dz$; analogamente $\int_{C_\varepsilon} f(z) dz$ tende a zero per $\varepsilon \rightarrow 0$ e pure gli integrali sulle semicirconferenze di raggio δ hanno limite 0 per $\delta \rightarrow 0$. Dunque passando al limite per $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, rimane

$$-2i \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-1}},$$

e quindi, finalmente

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \square$$

Esercizio 1.13.3 *Si calcoli*

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \quad .$$

SVOLGIMENTO: Il cammino d'integrazione che considereremo è uguale a quello precedentemente considerato $\Gamma_{\varepsilon, \delta, R}$. La funzione da considerare è

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)\sqrt{z^2-1}}$$

che ha poli in $z = i$ e $z = -i$. Procedendo come nel caso precedente si trova

$$-2i \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = 2\pi i [R(f; -i) + R(f; i)] \quad .$$

Occorre determinare con precisione l'argomento di $z^2 - 1$ nei due residui al fine di evitare errori clamorosi. In $z = i$, $\arg(z-1) = \frac{3}{4}\pi$ e $\arg(z+1) = \frac{7}{4}\pi$. Quindi in $z = i$, $\arg(z^2-1) = \pi$, mentre il modulo della stessa quantità è 2. Dunque $\sqrt{i^2-1} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = i\sqrt{2}$. In $z = -i$ si ha invece $\arg(z-1) = \frac{5}{4}\pi$ e $\arg(z+1) = \frac{7}{4}\pi$. Allora in $z = -i$, si ha $\sqrt{(-i)^2-1} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{2}\pi} = -i\sqrt{2}$. Si osservi che assumere in $z = -i$, $\sqrt{(-i)^2-1} = i\sqrt{2}$ come si potrebbe essere indotti a fare ragionando con superficialità, corrisponderebbe a scegliere invece che la determinazione principale del radicale quella che differisce per il fattore $e^{i\pi}$. Ma ciò non è possibile, visto che il piano è tagliato tra -1 e +1, il che impedisce il mescolamento delle due determinazioni. Si trova allora che

$$R(f; i) = \frac{1}{2i \cdot i\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = R(f; -i) = \frac{1}{-2i \cdot (-i\sqrt{2})}.$$

Finalmente si ottiene

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad . \square$$

Esercizio 1.13.4 *Si calcoli*

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{b^2 + x^2}, \quad b \neq 0, -1 < a < 1 \quad \left(= \frac{\pi b^{a-1}}{2 \cos(\frac{\pi a}{2})} \right).$$

Esercizio 1.13.5 Si calcoli

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} dx}{1+x+x^2}, \quad \left(= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\pi \sin \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{3}} \right).$$

Esercizio 1.13.6 Integrando la funzione e^{-z^2} lungo il cammino rettangolare formato dalle rette $y=0$, $y=b$, $x=R$, $x=-R$, e facendo quindi tendere $R \rightarrow \infty$, si stabilisca la relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2} \quad .$$

Esercizio 1.13.7 Mostrare che

$$P \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} \, dx = \pi \cot \alpha\pi, \quad 0 < \alpha < 1 \quad .$$

Esercizio 1.13.8 Verificare che vale la seguente uguaglianza dovuta a Eulero

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-p}}{1+2x \cos \lambda + x^2} \, dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \frac{\sin p\lambda}{\sin \lambda}, \quad -1 < p < 1, -\pi < \lambda < \pi \quad .$$

Esercizio 1.13.9 Applicando il teorema dell'indicatore logaritmico, trovare quante radici dell'equazione $z^6 + 6z + 10 = 0$ ci sono in ogni quadrante del piano complesso.

Esercizio 1.13.10 Mostrare che per $-1 < z < 3$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^z}{(1+x^2)^2} \, dx = \frac{\pi(1-z)}{4 \cos \frac{z\pi}{2}} \quad .$$

Esercizio 1.13.11 Utilizzando il teorema dei residui, si calcoli per n intero qualsiasi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{2n}} \quad .$$

1.14 Cenni sulla rappresentazione conforme.

Consideriamo la corrispondenza fra i piani della variabile complessa z e quella della variabile complessa w data da $w = f(z)$ con $f(z)$ funzione olomorfa di z , come una trasformazione di coordinate. Essa associa quindi al punto $z = x + iy$, di coordinate cartesiane x e y un punto $w = \xi + i\eta$ di coordinate cartesiane ξ e η . Tale processo di associazione verrà chiamato

in generale rappresentazione. Supponiamo ora che nel piano z vengano descritte due curve di equazione parametrica $z = a(t)$ e $z = b(t)$. Esse si incontrino in un punto $z_0 = a(t_0) = b(t_0)$. Nel punto d'incontro l'angolo formato dalle due curve è $\vartheta = \arg[a'(t_0)] - \arg[b'(t_0)] = \arg[a'(t_0) \cdot \overline{b'(t_0)}]$, dove $\overline{}$ indica il complesso coniugato.

Nel piano w saranno descritte due curve d'equazioni parametriche $w = f(a(t))$ e $w = f(b(t))$. Esse si incontrano nel punto $w_0 = f(z_0) = f(a(t_0)) = f(b(t_0))$. Calcoliamo l'angolo tra le due curve del piano w nell'ipotesi che sia $f'(z_0) \neq 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta} &= \arg[f'(a(t_0)) \cdot \overline{f'(b(t_0))}] = \arg\{f'(z_0) \cdot a'(t_0) \cdot \overline{f'(z_0) \cdot b'(t_0)}\} = \\ &= \arg\{|f'(z_0)|^2 \cdot a'(t_0) \cdot \overline{b'(t_0)}\} = \arg[a'(t_0) \cdot \overline{b'(t_0)}] = \vartheta . \end{aligned}$$

Dunque la rappresentazione $w = f(z)$ è conforme, cioè conserva gli angoli tra le curve corrispondenti (nei punti in cui è $f'(z) \neq 0$). In particolare, se nel piano w tracciamo le curve immagini dei sistemi di curve $x = \cos t$ e $y = \cos t$, poiché quest'ultime formano un sistema di curve ortogonali nel piano (x, y) , anche quelle considerate sono un sistema di curve ortogonali nel piano (ξ, η) . Un semplice esempio è fornito dalla funzione $w = e^z$. Il rettangolo $0 < x < a, 0 < y < \pi$ del piano (x, y) viene mutato come segue: $w = e^x \cdot e^{iy}$. Dunque l'immagine del rettangolo nel piano (x, y) è un settore di corona circolare $1 < |w| < e^a, 0 < \arg w < \pi$ nel piano (ξ, η) .

Un'osservazione molto importante che si può fare è la seguente. Se $u(\xi, \eta)$ è una funzione che soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad \text{in } D^* \quad ,$$

dove D^* è, per es., un aperto connesso e semplicemente connesso e limitato del piano (ξ, η) , allora, posto $U(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$, con $w = f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ olomorfa, la funzione $U(x, y)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \text{in } D \quad ,$$

dove D è il dominio che viene mutato in D^* dalla trasformazione $w = f(z)$. Dunque la conoscenza di una funzione armonica in D^* , si traduce nella conoscenza di una funzione armonica in D . Appare dunque importante il seguente problema: trovare una rappresentazione conforme che muti un dominio D del piano (x, y) in un dominio D^* del piano (ξ, η) , in modo che la frontiera di D sia portata nella frontiera di D^* e che la corrispondenza sia biunivoca. Una risposta efficace a questo problema è fornita dal seguente

Teorema 1.14.1 [Riemann] *Sia G un dominio aperto semplicemente connesso che non coincide con l'intero piano complesso e sia $a \in G$. Allora vi è una sola funzione olomorfa $f: G \rightarrow \mathbf{C}$ tale che*

1. $f(a) = 0$ e $f'(a) > 0$;
2. f è biiettiva;
3. $f(G) = \{z: |z| < 1\}$.

Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Un esempio è fornito dall'equazione $w = \sqrt{z} - 1$ che muta i punti interni al cardiode d'equazione in coordinate polari $r \leq 2(1 + \cos \vartheta)$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, nei punti interni al cerchio $|w| < 1$. Infatti, se $z = 2 \cdot e^{i\vartheta}(1 + \cos \vartheta)$, si ha $z = 4 \cdot e^{i\vartheta} \cdot \cos^2(\frac{\vartheta}{2})$ e dunque $\sqrt{z} = 1 + e^{i\vartheta}$. Dunque $w = e^{i\vartheta}$. E quindi, quando z percorre il cardiode w percorre la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine. Vediamo a cosa corrispondono i punti interni $|w| < 1$. Si ha $w = \sqrt{r}e^{i\frac{\vartheta}{2}} - 1$, con $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Allora $|w| = r - 2\sqrt{r} \cos \frac{\vartheta}{2} + 1$ e quindi $|w| < 1$ se e solo se $r - 2\sqrt{r} \cos \frac{\vartheta}{2} < 0$, ossia $\sqrt{r} < 2 \cos \frac{\vartheta}{2}$, cioè se e solo se $r < 2(1 + \cos \vartheta)$, cioè se e solo se i punti sono interni al cardiode. Dunque se si conosce la soluzione dell'equazione di Laplace con assegnate condizioni al contorno nel cerchio unitario, se ne deduce la conoscenza all'interno del cardiode.

1.14.1 Le trasformazioni bilineari di Möbius.

Studieremo ora alcuni semplici tipi di trasformazioni. Tra le trasformazioni più semplici ci sono quelle lineari. Sono trasformazioni del tipo

$$w = az + b \quad .$$

Una trasformazione di questo tipo porta una retta per due punti z_1 e z_2 in una retta passante per i punti

$$\begin{aligned} w_1 &= az_1 + b \\ w_2 &= az_2 + b \quad . \end{aligned}$$

La pendenza della retta per z_1 e z_2 è data da $\arg(z_2 - z_1)$, mentre quella della retta per w_1 e w_2 è data da $\arg(w_2 - w_1) = \arg\{a \cdot (z_2 - z_1)\} = \arg(a) + \arg(z_2 - z_1)$. Quindi l'effetto della trasformazione lineare è quello di fare rotare tutti i punti (vettori) del piano complesso di un angolo costante che è $\arg(a)$, oltre a traslarli di b . Consideriamo poi l'inversione

$$w = \frac{1}{z} \quad .$$

Il punto all'infinito $z = \infty$ viene mutato nel punto $w = 0$. Consideriamo nel piano z l'equazione

$$\left|z - \frac{p}{\alpha}\right|^2 = \frac{|p|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \text{ e } \alpha\beta < |p|^2.$$

L'equazione rappresenta una circonferenza di centro $\frac{p}{\alpha}$ e raggio $(\frac{|p|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha})^{\frac{1}{2}}$. Esplicitando il quadrato e moltiplicando per α , si ottiene

$$\alpha|z|^2 + \beta - \bar{p}z - p\bar{z} = 0.$$

Notiamo che per $\alpha = 0$ l'equazione diviene quella di una retta, che converremo di chiamare circonferenza generalizzata (con il centro all'infinito). Con un'inversione l'equazione data si muta nella

$$\alpha - pw - \overline{pw} + \beta|w|^2,$$

che è ancora una circonferenza generalizzata. Dunque l'inversione muta circonferenze generalizzate in circonferenze generalizzate. Due punti z_1 e z_2 che giacciono sullo stesso raggio e tali che

$$\left|z_1 - \frac{p}{\alpha}\right| \cdot \left|z_2 - \frac{p}{\alpha}\right| = \frac{|p|^2}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha},$$

si dicono *inversi*. Essi soddisfano l'equazione

$$\left(z_1 - \frac{p}{\alpha}\right) \overline{\left(z_2 - \frac{p}{\alpha}\right)} = \frac{|p|^2}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha},$$

cioè

$$\alpha z_1 \bar{z}_2 - \bar{p}z_1 - p\bar{z}_2 + \beta = 0.$$

Operando un'inversione la precedente si trasforma in

$$\alpha - pw_1 - \overline{pw_2} + \beta w_1 \bar{w}_2 = 0.$$

Quindi un'inversione porta punti inversi rispetto a una certa circonferenza in punti inversi rispetto alla circonferenza immagine. Ovviamente anche $w = az + b$ trasforma circonferenze in circonferenze e quindi la composizione di una trasformazione lineare e di un'inversione gode delle stesse proprietà: cioè porta la famiglia delle circonferenze generalizzate in sé. Consideriamo ora la trasformazione detta *bilineare* o di *Möbius*:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Supporremo $c \neq 0$, poiché se $c = 0$ ci si riduce al caso lineare. Allora si ottiene:

$$w = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} .$$

Dunque tale trasformazione può pensarsi ottenuta eseguendo successivamente la trasformazione lineare $w_1 = cz + d$, quindi l'inversione $w_2 = \frac{1}{w_1}$ e da ultimo la trasformazione lineare

$$w = \left(b - \frac{ad}{c}\right)w_2 + \frac{a}{c} .$$

Se fosse $ad - bc = 0$, tutto il piano z sarebbe trasformato in $w = \frac{a}{c}$. Supporremo dunque che sia verificato $ad - bc \neq 0$; in questo caso la trasformazione di Möbius è una trasformazione biunivoca del piano z sul piano w , che porta circonferenze generalizzate in circonferenze generalizzate.

Esercizio 1.14.1 *Si verifichi che la trasformazione bilineare*

$$w = \frac{-iz - 1}{z + i} ,$$

porta il disco $|z| < 1$ nel semipiano $\Im w > 0$.

1.15 La funzione Gamma di Eulero.

Definiremo la funzione Gamma di Eulero per mezzo del seguente integrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad , \Re(z) > 0 .$$

L'integrale è convergente se $\Re z > 0$. Mostriamo come la funzione possa essere prolungata a tutto il piano complesso (tranne i valori interi ≤ 0 della variabile). Cominciamo con l'osservare che vale una ben nota relazione di ricorrenza:

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt .$$

Ora se $\Re z > 0$ il contributo della parte finita è nullo e resta la relazione

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) .$$

È proprio questa proprietà che ci permetterà di estendere analiticamente la definizione di $\Gamma(z)$. Infatti se esiste una funzione olomorfa che soddisfa questa relazione in un dominio del piano complesso che contiene $\Re z >$

0 e che coincide in questo semipiano con l'integrale dato, allora questa è l'estensione analitica cercata.

Poiché, come facilmente si verifica

$$\Gamma(n+1) = n! \quad ,$$

per $n \geq 0$, la funzione Γ può intendersi come una soluzione al problema d'interpolazione che consiste nel determinare una funzione olomorfa $f(z)$ che ristretta ai valori interi vale $n!$.

Osserviamo che nella funzione integranda è $t \geq 0$ e, valendo $t^z = e^{z \log t}$, con $z = x + iy$, si avrà $|t^z| = t^x$. Posto $x = \Re z > 0$, vale

$$|\Gamma(x + iy)| \leq \Gamma(x) \quad , \quad x > 0 \quad .$$

Consideriamo ora il semipiano $\Re z > 1$ e, usando il teorema di Morera, mostriamo che $\Gamma(z)$ è olomorfa in detto semipiano. Infatti se consideriamo un triangolo $\Delta \subset \{z: \Re z > 1\}$, l'integrale di $\Gamma(z)$ esteso a questo triangolo, si può calcolare come un integrale iterato relativo a un integrale doppio assolutamente convergente. Cambiando l'ordine d'integrazione e tenendo presente che t^{z-1} è olomorfa, si trova che l'integrale è nullo. Dunque per l'arbitrarietà del triangolo, visto il Teorema di Morera, si conclude che $\Gamma(z)$ è olomorfa in $\Re z > 1$.

$$\int_{\Delta} \Gamma(z) dz = \int_{\Delta} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt \int_{\Delta} t^{z-1} dz = 0 .$$

Utilizzando la relazione di ricorrenza si ottiene

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad \text{per } 0 < \Re z \leq 1 .$$

Infatti, quando $0 < \Re z \leq 1$, si ha $1 < \Re(z+1) \leq 2$ e dunque $\Gamma(z+1)$ è olomorfa, $\frac{1}{z}$ lo è per $\Re z > 0$ e si conclude che $\Gamma(z)$ è olomorfa per $\Re z > 0$. Scrivendo la relazione di ricorrenza a partire da $z+2$, si trova

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \quad .$$

Ragionando come nel caso precedente, si trova che $\Gamma(z+2)$ è olomorfa per $-1 < \Re z \leq 0$, il che implica $0 < \Re(z+2) \leq 1$. $\frac{1}{z+1}$ è pure olomorfa se $\Re z > -1$, mentre $\frac{1}{z}$ è olomorfa nella regione detta, tranne che in $z=0$ dove ha un polo semplice. Dunque anche $\Gamma(z)$ sarà una funzione olomorfa per $\Re z > -1$, tranne che per un polo in $z=0$. Più in generale, per ogni $m > 1$, potremo concludere che

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \quad , \quad \text{per } \Re z > -m+1 \quad .$$

$\Gamma(z)$ è dunque olomorfa in $\Re z > -m + 1$, tranne che nei poli semplici $z = 0, -1, \dots, -m + 2$. In conclusione $\Gamma(z)$ si può estendere a una funzione olomorfa in tutto il piano complesso, tranne che nei punti $z = -n, n \in \mathbb{N}$, dove essa ha poli semplici. Una funzione olomorfa in tutto il piano tranne che per singolarità isolate di tipo polo, si dice funzione meromorfa, come già è stato ricordato. Dunque abbiamo dimostrato che $\Gamma(z)$ è una funzione meromorfa.

Affrontando il problema della continuazione analitica da un altro punto di vista potremo rappresentare $\Gamma(z)$ come un prodotto infinito, convergente in tutto il piano complesso. Consideriamo la seguente famiglia di funzioni che indicheremo con $\Gamma_n(z)$.

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \quad .$$

Osserviamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$ e che tale limite è uniforme in t . Osserviamo inoltre che la successione $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ è definitivamente monotona crescente. Ciò che esiste \bar{n} tale che per $n > \bar{n}$, si ha

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{n+1} \quad ,$$

come si può agevolmente verificare. Facendo la sostituzione $t = s \cdot n$, si ottiene

$$\Gamma_n(z) = n^z \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^n ds \quad .$$

Si dimostra, per induzione, che vale

$$\Gamma_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad .$$

Infatti, per $n = 1$ si trova

$$\Gamma_1(z) = \int_0^1 s^{z-1} (1-s) ds = \frac{s^z}{z} \Big|_0^1 - \frac{s^{z+1}}{z+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(z+1)} \quad .$$

Dunque la formula vale per $n = 1$. Supponiamo che valga per $n - 1$ e mostriamo che allora vale per n .

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= n^z \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^{n-1} (1-s) ds = \\ &= n^z \left\{ \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^{n-1} ds - \int_0^1 s^z (1-s)^{n-1} ds \right\} = \end{aligned}$$

$$= n^z \left\{ \frac{(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)} - \frac{(n-1)!}{(z+1)\dots(z+n)} \right\} = n^z \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Perciò

$$\frac{1}{\Gamma_n(z)} = n^{-z} \cdot z \cdot \frac{z+1}{1} \dots \frac{z+n}{n} = n^{-z} \cdot z \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right).$$

Consideriamo il prodotto

$$z \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} = z \cdot e^{-z(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})} \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right).$$

Poiché $n^{-z} = e^{-z \log n}$, moltiplicando e dividendo per tale fattore si trova

$$z \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} = z \cdot e^{-z(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n)} \frac{1}{\Gamma_n(z)}.$$

Ora, si può dimostrare che esiste il limite per $n \rightarrow \infty$ del precedente prodotto e che esso è una funzione intera $G(z)$. Cioè vale

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}.$$

La funzione $G(z)$ ha al finito gli zeri nei punti interi $z = n, n \leq 1$, e ha una singolarità essenziale all'infinito. Noi non daremo la dimostrazione del fatto citato, che viene affrontato nel problema della fattorizzazione delle funzioni intere. L'analogia con i polinomi è forte. Si sa che ogni polinomio a coefficienti in \mathbf{C} è fattorizzabile in fattori lineari del tipo $(z - \alpha_i)$, tenendo conto della molteplicità dei fattori. Una simile fattorizzazione vale anche per le funzioni intere che, in un certo senso, sono polinomi di grado infinito. Esse saranno fattorizzabili con fattori lineari come nel caso dei polinomi; tuttavia, nel caso d'infiniti zeri, ogni fattore lineare andrà moltiplicato per un fattore esponenziale, scelto in modo opportuno, al fine d'assicurare la convergenza. Poiché esiste finito il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \gamma$$

dove $\gamma = 0,57722\dots$ è detta costante di Eulero-Mascheroni³ (della quale non si sa se sia razionale o irrazionale), si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_n(z)} = zG(z)e^{\gamma z}.$$

³Lorenzo Mascheroni nato a Bergamo nel 1750, morto a Parigi nel 1800. L'abate Mascheroni insegnò fisica e matematica nel Seminario di Bergamo dal 1778. In seguito a un suo lavoro molto apprezzato sull'equilibrio delle volte, nel 1786 venne chiamato

Dovendo dimostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(z) = \Gamma(z)$ e trattandosi di funzioni olomorfe, sarà sufficiente dimostrare la convergenza per i valori reali e positivi di z . Sia $z = x > 0$. Allora

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &= \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt < \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{(n+1)} dt < \\ &< \int_0^{n+1} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{(n+1)} dt = \Gamma_{n+1}(x) < \int_0^{n+1} t^{x-1} e^{-t} dt < \Gamma(x) \quad . \end{aligned}$$

D'altra parte, se si fissa $0 < a < n$, si ha pure

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k(x) > \int_0^a t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \quad .$$

Ma $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ converge uniformemente a e^{-t} e quindi, si può passare al limite sotto il segno d'integrale, ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x) \geq \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt \quad .$$

Poiché ciò vale per ogni $a > 0$, il confronto con la disuguaglianza precedente dà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x) \quad .$$

Abbiamo dunque stabilito la formula

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = zG(z)e^{\gamma z} \quad .$$

Infine, supposto $0 < \Re z < 1$, possiamo stabilire la seguente formula fondamentale

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \quad .$$

Infatti

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \int_0^\infty s^{-z} e^{-s} ds = \iint_0^\infty t^{z-1} s^{-z} e^{-(t+s)} dt ds \quad ;$$

a insegnare algebra e geometria nell'Università di Pavia, università della quale divenne rettore dal 1789 al 1793. Calcolò le prime 32 cifre decimali della costante sopra ricordata. Ammiratore di Napoleone, venne inviato a Parigi quale membro della commissione di studio delle nuove misure e monete. In seguito alle vittorie degli Austro-Russi non poté rientrare in Italia. Fu tra i fondatori degli studi d'ingegneria in Italia secondo il curriculum rimasto sostanzialmente in vigore fino al 2000. Sostenne la validità dell'insegnamento incentrato sulle università, come contrapposto a quello delle Grandes Écoles instaurato in Francia. (Non si può prevedere se gli studi d'ingegneria sopravviveranno alla riforma che sta per essere inaugurata.)

posto $t = us$, con $0 \leq u < \infty$, si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_0^\infty t^{z-1} s^{-z} e^{-(t+s)} dt ds &= \iint_0^\infty u^{z-1} s^{z-1} s^{-z} e^{-s(1+u)} ds du = \\ &= \iint_0^\infty u^{z-1} e^{-s(1+u)} ds du = \int_0^\infty u^{z-1} du \int_0^\infty e^{-s(1+u)} ds = \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{\sin \pi z} \end{aligned}$$

Si noti che l'ultimo passaggio si ottiene ricordando il risultato calcolato nell'esempio 1.13.1. Per il principio della continuazione analitica, la formula ottenuta continua a valere in tutto il piano complesso, dunque per ogni valore di z per il quale abbia significato. In particolare possiamo valutare $\Gamma(\frac{1}{2})$. Infatti dalla formula otteniamo $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$, e quindi $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

1.15.1 La Formula di Stirling.

Vogliamo ricordare che vale la seguente formula di Stirling per il logaritmo della funzione $\Gamma(z)$

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + w(z) \quad .$$

Si tratta di valutare il resto $w(z)$ che tende a zero per $|z| \rightarrow \infty$ purché ci si mantenga nel piano complesso in una regione che esclude un settore racchiudente il semiasse reale negativo. Tale settore si può individuare come segue: ha vertice in $x = 2$ e semiapertura $\frac{\pi}{6}$. Tralasciando i lunghi calcoli si trova la seguente valutazione di $w(z)$

$$|w(z)| < \begin{cases} \frac{1}{24} \frac{\pi}{|z|} + \frac{1}{12} \frac{1}{|z|^2} & : \text{ se } \Re(z) \geq 0, |z| > 1 \\ & : \\ \frac{1}{12} \frac{\pi}{|y|} + \frac{1}{6} \frac{1}{y^2} & : \text{ se } \Re(z) < 0, \Im(z) > 1 \end{cases} .$$

In particolare per valori reali di $x > 1$ si può valutare $\Gamma(x)$ come segue

$$\Gamma(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi} \cdot (1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \dots) \quad .$$

Ricordando che $n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, si trova infine

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots) \quad .$$

Bibliografia

Quella che segue è una breve lista dei libri consultati per preparare le presenti note. In particolare è interessante il libro citato al punto 3 della bibliografia, che presenta un approccio più recente. Può inoltre essere utile, per la quantità e ricchezza degli esercizi, il libro ricordato al punto 8 della bibliografia.

1. L. Amerio, *Elementi di Analisi superiore*, Tamburini, Milano (1960).
2. G. Bagnera, *Lezioni sopra la teoria delle funzioni analitiche*, Sanpaolesi, Roma (1927).
3. J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, Spriger-Verlag, New York (1978).
4. E. Goursat, *A course of Mathematical Analysis - Functions of a complex variable*, Vol. II. Part one, Dover, New York (1959).
5. E. Hille, *Analytic function theory*, Blaisdwell, Voll. I e II, New York (1963).
6. G. Sansone, *Lezioni sulla teoria di una variabile complessa*, Voll. I e II, Cedam, Padova (1955).
7. F. Tricomi, *Funzioni analitiche*, Zanichelli, Bologna (1961).
8. E.T. Whittaker e G.N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (1962).