Capitolo 2

Equazioni differenziali alle derivate parziali: un'introduzione.

2.1 Considerazioni preliminari

Data una funzione $f : \Omega \subset \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, con N un numero naturale sufficientemente grande, diremo *equazione differenziale alle derivate parziali d'ordine* n, un'equazione del tipo

$$f(x_1, \dots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x_1^n}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n}) = 0 \quad , \tag{2.1}$$

se la funzione dipende esplicitamente da almeno una delle derivate parziali d'ordine n di z. $x_1, \dots, x_m$ sono le variabili indipendenti; $z(x_1, \dots, x_m)$ è la funzione incognita che si vuole soddisfi l'equazione differenziale stessa. Una funzione $z = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ che soddisfi identicamente l'equazione (2.1) si dirà un *integrale* o *soluzione* dell'equazione stessa. La totalità degli integrali, esclusi al più alcuni di carattere particolare, detti *singolari*, costituisce l'integrale generale dell'equazione. L'equazione si dice in forma *normale* se essa è risolta rispetto a una delle derivate d'ordine massimo rispetto ad un'unica variabile indipendente. Cioè se appare nella forma (per esempio):

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1^n} = g(x_1, \dots, x_m, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x_1^{n-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n}) \ . \tag{2.2}$$

Se la funzione f è un polinomio di grado ≤ 1 in z e nelle sue derivate e dipende effettivamente da qualche derivata parziale di z, allora l'equazione si dice *lineare.* È lineare e del primo ordine la seguente equazione:

$$P_1(x_1,\ldots,x_m)\frac{\partial z}{\partial x_1}+P_2(x_1,\ldots,x_m)\frac{\partial z}{\partial x_2}\ldots+P_m(x_1,\ldots,x_m)\frac{\partial z}{\partial x_m} \\ -Q(x_1,\ldots,x_m)\cdot z=R(x_1,\ldots,x_m)\ , \quad (2.3)$$

con i coefficienti $P_i(x_1,\ldots,x_m)$ non tutti nulli. Un'equazione che sia lineare solo nelle derivate di ordine massimo si dice *quasi lineare* o *semilineare.*

2.2 Alcuni esempi significativi

Al fine di mettere in evidenza la diversità che intercorre tra le equazioni differenziali ordinarie e quelle alle derivate parziali, sarà utile considerare alcuni semplici, ma significativi esempi. Per un'equazione differenziale ordinaria d'ordine n la totalità delle sue soluzioni o *integrale generale* può essere rappresentata, a meno di possibili integrali singolari, da una funzione della variabile indipendente, che dipende pure da n costanti d'integrazione, $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Viceversa, per ogni famiglia di funzioni a n parametri, c'è un'equazione differenziale ordinaria d'ordine n cui la funzione soddisfa. Per le equazioni a derivate parziali la situazione è più complicata. Anche in questo caso si può cercare una soluzione generale, ma, in questo caso, gli elementi arbitrari da fissare al fine d'ottenere una soluzione particolare, non sono più, in generale, costanti arbitrarie, ma sono **funzioni** arbitrarie. Consideriamo perciò alcuni casi particolari d'equazioni

Esempio 2.2.1

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0 \qquad \forall (x,y)\in \mathbf{R}^2 \quad . \quad (2.4)$$

L'equazione chiede di trovare una funzione definita su tutto il piano e derivabile con continuità rispetto a y, che non varia con y; cioè una funzione che dipende solo da x:

$$u(x,y)=\varphi(x) \quad ,$$

con $\varphi(x)$ funzione arbitraria del suo argomento.

Esempio 2.2.2

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}=0 \qquad \forall (x,y)\in \mathbf{R}^2 \quad . \quad (2.5)$$

Si vuole trovare una funzione di classe $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$ tale che

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad ,$$

e quindi tale che $\frac{\partial u}{\partial y}$ dipenda solo da y. Allora è $\frac{\partial u}{\partial y} = \phi(y)$ e quindi, con un'integrazione rispetto a y, $u(x,y) = \Phi(y) + \textit{costante}$ essendo la costante tale rispetto a y e quindi dipendente, in generale, da x. Cioè

$$u(x,y) = \Phi(y) + \Psi(x) \quad ,$$

dove $\Phi(y)$ e $\Psi(x)$ si supporranno funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ se la stessa regolarità si vuole per la soluzione $u(x,y)$. (In realtà, nel caso specifico, sarà sufficiente supporre che siano di classe $\mathcal{C}^1$).

Esempio 2.2.3 *Consideriamo l'equazione non omogenea*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad , \tag{2.6}$$

con $f(x,y)$ continua su $\mathbf{R}^2$.

Tale equazione, come facilmente si verifica, ha la soluzione generale

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \, + \Phi(x) \, + \Psi(y) \quad ,$$

dove x_0 e y_0 sono costanti arbitrarie.

Esempio 2.2.4

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad . \tag{2.7}$$

Per trovare la soluzione dell'equazione data operiamo la seguente sostituzione di variabili

$$\begin{aligned} \xi &= x + y \\ \eta &= x - y \quad . \end{aligned}$$

Per gli operatori differenziali $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ si ottiene allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \quad , \end{aligned}$$

e quindi l'equazione diviene

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\,,$$

cioè

$$2\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0\,.$$

Ne segue che u è funzione della sola ξ. La soluzione generale dell'equazione è dunque

$$u(x, y) = \phi(x + y) \quad ,$$

con $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$.

Esempio 2.2.5 *Consideriamo un'equazione che sia della forma*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \qquad \forall (x,y) \in A \subseteq \mathbf{R}^2 \quad , \tag{2.8}$$

con $g(x, y)$ funzione di classe $\mathcal{C}^1(A)$, essendo A un aperto in $\mathbf{R}^2$.

L'equazione data afferma che la matrice jacobiana

$$J\begin{pmatrix} u & g \\ x & y \end{pmatrix}\,,$$

ha determinante nullo e che perciò $u(x, y)$ dipende funzionalmente da $g(x, y)$, cioè che esiste una funzione $\phi\colon E(\subseteq \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $E \supseteq g(A)$, tale che $u(x, y) = \phi(g(x, y))$. Ciò si può verificare direttamente come segue, nell'ipotesi che A abbia sezioni connesse (intervalli) con ogni parallela agli assi coordinati. Si faccia il seguente cambiamento di variabili, ammettendo inoltre che $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \neq 0$ in A:

$$\begin{aligned} \xi &= g(x, y) \\ \eta &= y \quad . \end{aligned}$$

Allora, posto $u(x, y) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

Cioè, nel caso specifico

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot 1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\\&\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta})=\\&-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}=0\,.\end{aligned}$$

Perciò, nell'ipotesi che sia $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\neq 0$, si ottiene

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}=0\quad,$$

cioè $\tilde{u}$ non dipende da η, ma solo da ξ. Ossia esiste una funzione ϕ tale che $u(x,y)=\tilde{u}(\xi)=\phi(\xi)=\phi(g(x,y))$. Si può verificare che, sotto condizioni opportune, anche se g dipende esplicitamente da u, continua a valere che la soluzione u è espressa, in forma implicita, dall'espressione $u(x,y)=\phi\big(g(x,y,u(x,y))\big)$. Per esempio, la soluzione dell'equazione di Burger

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+u\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0, \tag{2.9}$$

ha una soluzione che si può scrivere, in modo implicito

$$u(x,t)=\phi(x-u\cdot t)\quad.$$

Esercizio 2.2.1 *Si studino le condizioni sotto le quali la funzione implicita sopra scritta è soluzione della (2.9).*

Esempio 2.2.6 *Consideriamo l'equazione*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\qquad\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2\quad. \tag{2.10}$$

Posto

$$\begin{aligned}\xi&=x+y\\\eta&=x-y\quad,\end{aligned}$$

si trova

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\\\frac{\partial^2}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\quad.\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione data, si ottiene

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = 0 \quad ,$$

che, come è noto, ha soluzione

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta) \quad ,$$

ossia

$$u(x, y) = \Phi(x + y) + \Psi(x - y) \quad ,$$

dove Φ e Ψ sono due funzioni arbitrarie di classe $\mathcal{C}^2$.

Abbiamo dato vari esempi nei quali una soluzione "generale" del problema dipende da una o più funzioni arbitrarie. Talvolta si troverà che un'equazione differenziale a derivate parziali si può esprimere come una famiglia di funzioni dipendenti da uno o più parametri reali. Una famiglia a due parametri $u = \phi(x, y, a, b)$, soluzione di un'equazione differenziale del prim'ordine

$$f(x, y, u, p, q) = 0 \quad ,$$

(dove $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$) si dice un *integrale completo* dell'equazione stessa se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} \phi_a & \phi_{xa} & \phi_{ya} \\ \phi_b & \phi_{xb} & \phi_{yb} \end{pmatrix}$$

è 2. Ciò vale, in particolare, se $\phi_{xa} \cdot \phi_{yb} - \phi_{xb} \cdot \phi_{ya} \neq 0$.
Consideriamo ora l'equazione

$$u^2(p^2 + q^2 + 1) = 1 \quad ,$$

e facciamo l'ipotesi che per ogni punto assegnato $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ la soluzione dipenda solo dalla distanza r da tale punto. Posto $x = a + r\cos\theta, y = b + r \operatorname{sen}\theta$, si trova

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\theta.$$

Dunque $p^2 + q^2 = (\frac{\partial u}{\partial r})^2 = (u'(r))^2$. L'equazione diviene $(u'(r))^2 = \frac{1}{u^2} - 1$, che ha come soluzione $u^2 = 1 - r^2 = 1 - (x - a)^2 - (y - b)^2$.

Esempio 2.2.7 *Si consideri la famiglia di sfere*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + u^2 = 1 \quad .$$

Si mostri che essa è l'integrale completo dell'equazione

$$u^2(p^2 + q^2 + 1) = 1$$

e che esistono integrali singolari, non deducibili dall'integrale completo.

La famiglia data rappresenta la totalità delle sfere di raggio 1 aventi il centro sul piano x, y. Dall'equazione della famiglia, derivando rispetto a x e rispetto a y, si ottiene

$$\begin{array}{l} 2(x-a) + 2up = 0 \\ 2(y-b) + 2uq = 0 \quad . \end{array}$$

Di qui si ottiene $(x-a) = -u \cdot p$ e $(y-b) = -u \cdot q$. E, finalmente, sostituendo nell'equazione della famiglia

$$u^2(p^2 + q^2 + 1) = 1 \quad .$$

Dunque, eliminando i parametri dalla famiglia di sfere, si ottiene l'equazione della quale ci siamo precedentemente occupati; abbiamo verificato che la famiglia considerata è una soluzione dipendente da due parametri dell'equazione stessa. Poiché, con le notazioni sopra introdotte, abbiamo $\phi_{xa} = -2, \phi_{ya} = 0, \phi_{xb} = 0, \phi_{yb} = -2$, si verifica che $\phi_{xa} \cdot \phi_{yb} - \phi_{xb} \cdot \phi_{ya} = 4 \neq 0$ e dunque che la famiglia a due parametri è un integrale completo dell'equazione data. Questa famiglia ha un inviluppo formato dai due piani $u = 1$ e $u = -1$, inviluppo che si ottiene eliminando a e b dall'equazione della famiglia e dalle sue derivate rispetto ad a e a b:

$$\begin{array}{l} (x-a)^2 + (y-b)^2 + u^2 = 1 \\ (x-a) = 0 \\ (y-b) = 0 \quad . \end{array}$$

L'inviluppo non è ottenibile attribuendo ad a e b valori particolari, dunque è un integrale singolare.
Avevamo affermato che un'equazione a derivate parziali ha una soluzione generale dipendente da una o più funzioni arbitrarie. Ora un integrale completo sembra fornire una classe più ristretta di soluzioni. Se imponiamo che $b = w(a)$ essendo w un'arbitraria funzione di classe $\mathcal{C}^1$, derivando rispetto ad a l'integrale completo, avremo $\phi_a + \phi_b \cdot w'(a) = 0$. Se si riesce a eliminare a tra quest'ultima equazione e $u = \phi(x, y, a, w(a))$ si troverà una soluzione del tipo $u = \psi(x, y)$ essendo ψ una funzione dipendente dalla funzione arbitraria w.

2.3 Equazioni del primo ordine quasi lineari, in due variabili indipendenti. Caratteristiche

Supponiamo data un'equazione differenziale ordinaria del prim'ordine

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad .$$

Ad ogni punto (x, y) del dominio piano nel quale f è definita si può associare la direzione (o le direzioni) $\frac{dy}{dx}$, che soddisfano l'equazione stessa. Quindi l'andamento delle soluzioni può essere intuito e rappresentato mediante il campo di direzioni. Ciò è particolarmente utile quando ad ogni $(x, y) \in A$, A aperto in $\mathbf{R}^2$, corrisponde un solo valore di $\frac{dy}{dx}$, perché allora si ha un'idea immediata dell'andamento delle curve integrali. Un artificio dello stesso tipo è possibile e utile anche nel caso di un'equazione alle derivate parziali. Considereremo il caso più semplice: quello di un'equazione quasi lineare (non più complicata di un'equazione lineare da questo punto di vista) in due variabili indipendenti. Essa si scrive:

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad . \tag{2.11}$$

Useremo talvolta le notazioni, dette di Monge, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, per cui l'equazione (2.11) si riscrive

$$P(x, y, z) \cdot p + Q(x, y, z) \cdot q = R(x, y, z) \quad .$$

Studieremo la struttura delle superficie integrali dell'equazione assegnata e constateremo che essa è costituita da una semplice infinità di linee che appartengono ad una famiglia di linee spaziali dipendenti da un parametro. Queste sono integrali di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, individuato dall'equazione assegnata. Sia σ una superficie integrale di equazione $z = z(x, y)$ soluzione dell'equazione data. Sia $M = (x, y, z)$ un suo punto e sia τ il piano tangente a σ in M. Osserviamo che una soluzione "classica" della (2.11) è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$; essa è differenziabile in ogni suo punto, e quindi il suo grafico ammette ovunque piano tangente. Se (X, Y, Z) sono le coordinate "correnti" sul piano τ, l'equazione del piano tangente è

$$Z - z = (X - x)p + (Y - y)q \quad .$$

La normale a τ (e a σ) in M ha coseni direttori proporzionali a $p, q, -1$, rispettivamente. Dunque il vettore di componenti

$$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$$

giace su τ, poiché dall'equazione risulta: $P(x,y,z)\cdot p+Q(x,y,z)\cdot q-R(x,y,z)=0$.
Consideriamo poi le linee spaziali λ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \quad , \end{cases}$$

che in ogni punto sono tangenti al vettore di componenti P,Q,R. I coseni direttori della tangente a una linea λ sono proporzionali a $\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}$, e quindi, ponendo uguale a 1 una costante di proporzionalità (il che si può fare: cambia eventualmente un fattore di scala nella variabile t), è

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= P(x,y,z) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} &= Q(x,y,z) \\ \\ \dfrac{dz}{dt} &= R(x,y,z) \quad . \end{cases} \tag{2.12}$$

Il sistema (2.12) si dice il *sistema caratteristico* associato all'equazione (2.11) e le curve λ che ne sono soluzione sono dette le *linee cartteristiche* della (2.11). Dimostreremo ora che le superficie integrali sono descritte per mezzo delle linee integrali. Precisamente abbiamo

Teorema 2.3.1 *Siano $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ localmente lipschitziane in $A\subseteq \mathbf{R}^3$, A aperto. Sia $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ un punto che giace su una superficie integrale σ, cioè σ sia grafico di una soluzione della (2.11). Sia inoltre λ una caratteristica passante per M_0. Allora λ giace per intero su σ. Cioè, se $x(t_0)=x_0,y(t_0)=y_0,z(t_0)=z_0$, se $x(t),y(t),z(t),t\in J(\subseteq\mathbf{R})$ è una soluzione di (2.12), allora $(x(t),y(t),z(t))\in\sigma,\forall t\in J$.*

Dimostrazione. Nell'ipotesi della locale lipschitzianità delle P,Q,R rispetto ai singoli argomenti x,y,z, le funzioni sono complessivamente continue. Infatti, se $P(x,y,z)$ è localmente lipschitziana in $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ significa che esistono un intorno U di M_0, per esempio $U=]x_0-\delta,x_0+\delta[\times]y_0-\delta,y_0+\delta[\times]z_0-\delta,z_0+\delta[$ e costanti positive L_1,L_2,L_3 tali che, se $(x,y,z),(x',y,z)\in U$, vale $|P(x',y,z)-P(x,y,z)|\leq L_1|x'-x|$ e analogamente per y e z. Ora si ha

$$\begin{aligned} |P(x,y,z)-P(x_0,y_0,z_0)| &\leq |P(x,y,z)-P(x_0,y,z)|+ \\ |P(x_0,y,z)-P(x_0,y_0,z)| &+ |P(x_0,y_0,z)-P(x_0,y_0,z_0)| \\ &\leq L_1|x-x_0|+L_2|y-y_0|+L_3|z-z_0| \\ &\leq (L_1+L_2+L_3)||(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)||\,. \end{aligned}$$

Dunque, se $(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)$, vale $P(x, y, z) \to P(x_0, y_0, z_0)$. Analogamente per $Q(x, y, z)$ e $R(x, y, z)$ che sono dunque funzioni continue nel complesso delle variabili in U. Un sistema come il (2.12) nel quale P, Q, R non dipendono esplicitamente dalla variabile indipendente t, si dice *autonomo*. Poiché P, Q, R sono localmente lipschitziane rispetto alle singole variabili x, y, z e globalmente continue rispetto alle stesse, esiste una e una sola soluzione locale del sistema. Sia λ_0 la proiezione di λ sul piano x, y. La curva λ_0 ha equazioni $x = x(t), y = y(t)$. In corrispondenza ai punti di λ_0 i punti su λ e σ hanno quote, rispettivamente, $z(t)$ e $z_1(t) = z(x(t), y(t))$. Mostreremo che $z(t)$ e $z_1(t)$ coincidono. Infatti

$$z'(t) - z_1'(t) = R(x(t), y(t), z(t)) - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} =$$
$$R(x(t), y(t), z(t)) - \frac{\partial z}{\partial x}P(x(t), y(t), z(t)) - \frac{\partial z}{\partial y}Q(x(t), y(t), z(t)) = 0\,,$$

poiché vale (2.11). Ciò vale per ogni $t \in J$, J essendo un intervallo contenente t_0. Dunque $z(t) - z_1(t)$ è costante in J. Ma $z(t_0) - z_1(t_0) = 0$ e quindi $z_1(t) = z(t), \forall t \in J$. Ossia tutti i punti della caratteristica λ stanno su σ. $\square$

Per l'unicità della soluzione del sistema delle caratteristiche si richiede che ovunque nel campo di variabilità di x, y, z, non siano nulli negli stessi punti $P(x, y, z)$ e $Q(x, y, z)$. L'ipotesi che P e Q non abbiano punti d'annullamento comuni assicura che curve λ distinte non si incontrino. I punti in cui $P(x, y, z)$ e $Q(x, y, z)$ si annullano contemporaneamente si dicono *punti singolari* del sistema caratteristico.

2.4 Problema di Cauchy per le equazioni quasi lineari del prim'ordine

Data l'equazione

$$P(x, y, z) \cdot p + Q(x, y, z) \cdot q = R(x, y, z) \quad , \tag{2.13}$$

e la curva Γ di equazioni

$$\begin{cases} x &= \phi(\tau) \\ y &= \psi(\tau) \\ z &= \omega(\tau) \quad , \end{cases} \tag{2.14}$$

ci proponiamo di risolvere il seguente problema di Cauchy: costruire una superficie integrale $z(x, y)$ soluzione della (2.13) che passa per la Γ, cioè tale che $z(\phi(\tau), \psi(\tau)) = \omega(\tau)$. Ammettendo che tale superficie σ esista noi cercheremo una sua rappresentazione nella forma parametrica

$$\begin{cases} x = x(t,\tau) \\ y = y(t,\tau) \\ z = z(t,\tau) \quad . \end{cases} \tag{2.15}$$

Sia M_0 il punto di Γ che corrisponde al valore τ_0 del parametro. Sia λ_{τ_0} la caratteristica che passa per M_0; tale caratteristica giace per intero su σ e le sue equazioni si trovano integrando il sistema caratteristico

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y,z) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y,z) \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = R(x,y,z) \quad , \end{cases} \tag{2.16}$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0,\tau_0) = \phi(\tau_0) \\ y(0,\tau_0) = \psi(\tau_0) \\ z(0,\tau_0) = \omega(\tau_0) \quad . \end{cases} \tag{2.17}$$

Le funzioni trovate saranno, come funzioni di t, soluzioni di (2.16) e come funzioni di τ soddisfano la condizione (2.17). Al variare di τ_0 il punto M_0 varia su Γ e quindi le corrispondenti caratteristiche varieranno descrivendo la superficie σ. Per l'unicità delle soluzioni del sistema caratteristico due linee caratteristiche non si incontrano nel dominio di definizione. Perciò le funzioni di t e τ danno una descrizione geometrica di σ. Ci chiediamo ora come debba essere assegnata la curva Γ affinché il problema ammetta una e una sola soluzione. Diremo Γ_0 la linea d'equazioni $x = \phi(\tau), y = \psi(\tau)$, proiezione di Γ sul piano x, y. Γ_0 si dirà la *linea portante i dati*, poiché in ogni suo punto è assegnato il valore $z = \omega(\tau)$ della superficie integrale. Diremo poi $\lambda_{0,\tau}$ la proiezione di λ_τ sul piano x, y, di equazioni

$$\begin{matrix} x = x(t,\tau) \\ y = y(t,\tau) \quad . \end{matrix} \tag{2.18}$$

Cerchiamo dunque le condizioni che ci permettono di porre in forma cartesiana le equazioni parametriche della superficie integrale σ.
Supponiamo che, in un certo campo Ω di variabilità di t e τ, il determinante del jacobiano

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\tau)} = \det J \begin{pmatrix} x & y \\ t & \tau \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \end{vmatrix} \neq 0 \,, \tag{2.19}$$

allora dalle (2.18) si possono ricavare t e τ in funzione di x e y, dal momento che le funzioni $x = x(t,\tau), y = y(t,\tau)$ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^1$, definite su un aperto Ω del piano t,τ, a valori in un aperto A del piano x,y. Se il detto determinante è non nullo in Ω, l'invertibilità è assicurata almeno tra un aperto $\Omega' \subseteq \Omega$ e un aperto $A' \subseteq A$ (Teorema di invertibilità locale per funzioni di classe $\mathcal{C}^1$). Sostituendo nella terza equazione, si ottiene l'equazione cartesiana della superficie σ

$$z = z(t(x,y),\tau(x,y)) = z(x,y)\colon A' \to \mathbf{R} \quad . \tag{2.20}$$

Se il jacobiano soddisfa la condizione (2.19) per $t = 0$ e per $a \le \tau \le b$, essendo $[a,b]$ l'intervallo o anche parte dell'intervallo di definizione di Γ, allora esiste un dominio rettangolare $]-h,h[\times[a,b]$ (o $]-h,h[\times]a-k,b+k[$ se $[a,b]$ è una parte propria dell'intervallo illimitato sul quale è definita Γ), (relativamente) aperto, nel quale la (2.19) è soddisfatta. Senza fare ulteriori restrizioni sul dominio, supponiamo che quello detto sia l'Ω' sul quale vale l'invertibilità. Riscrivendo la (2.19), dopo avere sostituito alle derivate i loro valori per $t = 0$, si ottiene

$$\begin{vmatrix} P(\phi(\tau),\psi(\tau),\omega(\tau)) & Q(\phi(\tau),\psi(\tau),\omega(\tau)) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\tau} & \dfrac{\partial\psi}{\partial\tau} \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{2.21}$$

Dobbiamo dunque verificare che la (2.20) fornisce la soluzione del problema di Cauchy (2.13) con la condizione "iniziale" $z(\phi(\tau),\psi(\tau)) = \omega(\tau)$. Dall'uguaglianza

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} &= \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \tau} &= \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \tau} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \tau} \end{cases},$$

si trova

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{J}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial\tau} & -\dfrac{\partial y}{\partial t} \\ \\ -\dfrac{\partial x}{\partial\tau} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial t} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial\tau} \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

dove $J = (\dfrac{\partial x}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\tau} - \dfrac{\partial x}{\partial\tau}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t}) = \det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(t,\tau)}$. Allora

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} &= \dfrac{1}{J}\cdot(\dfrac{\partial z}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\tau} - \dfrac{\partial z}{\partial\tau}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t}) \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} &= \dfrac{1}{J}\cdot(\dfrac{\partial z}{\partial\tau}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t} - \dfrac{\partial z}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\tau}) \end{cases} \quad . \tag{2.23}$$

Perciò si trova alla fine:

$$\begin{aligned} P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{J}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}(P\frac{\partial y}{\partial \tau}-Q\frac{\partial x}{\partial \tau})+\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial z}{\partial \tau}(-P\frac{\partial y}{\partial t}+Q\frac{\partial x}{\partial t}) \\ &= \frac{1}{J}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\cdot J+\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial z}{\partial \tau}(-PQ+QP)=\frac{\partial z}{\partial t}=R \quad . \end{aligned} \tag{2.24}$$

A $x=x(0,\tau)=\phi(\tau), y=y(0,\tau)=\psi(\tau)$, cioè $(x,y)\in\Gamma_0$, per la biunivocità della corrispondenza tra Ω' e A' corrispondono i valori $t(\phi(\tau),\psi(\tau))=0$ e $\tau(\phi(\tau),\psi(\tau))=\tau$. Perciò $z(0,\tau)=z(\phi(\tau),\psi(\tau))=\omega(\tau)$, e quindi anche la condizione iniziale è soddisfatta.

Osserviamo che $\frac{\partial x}{\partial t}|_{t=0}$ e $\frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0}$ sono proporzionali ai coseni direttori della tangente a $\lambda_{0,\tau}$ in un certo punto, mentre $\frac{\partial x}{\partial \tau}|_{t=0}$ e $\frac{\partial y}{\partial \tau}|_{t=0}$ sono proporzionali ai coseni direttori della tangente a Γ_0 nello stesso punto. Il modulo del jacobiano è perciò il modulo del prodotto vettoriale di tali vettori tangenti a $\lambda_{0,\tau}$ e Γ_0. Esso soddisferà la condizione (2.21) purché $\lambda_{0,\tau}$ sia linea regolare, cioè purché $P(x,y,z)$ e $Q(x,y,z)$ non siano contemporaneamente nulli, purché sia regolare Γ_0, cioè purché $\phi'(\tau)$ e $\psi'(\tau)$ non siano contemporaneamente nulli e purché $\lambda_{0,\tau}$ e Γ_0 non siano tangenti. Diremo che in questo caso la linea portante i dati non è in alcun punto caratteristica.
Dunque abbiamo dimostrato il seguente

Teorema 2.4.1 *Siano $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ localmente lipschitziane in $A\subseteq\mathbf{R}^3$, A aperto. Supponiamo inoltre che $P(x,y,z)$ e $Q(x,y,z)$ non si annullino contemporaneamente in uno stesso punto e che nessun punto della linea portante i dati sia caratteristico. Allora esiste localmente una e una sola soluzione dell'equazione (2.13) che passa per la curva Γ d'equazioni (2.14).* $\square$

Supponiamo poi che $\lambda_{0,\tau}$ e Γ_0 siano tangenti in un solo punto. Γ verrà spezzata in due curve Γ' e Γ''. Possiamo costruire la superficie σ' relativa a Γ' e σ'' relativa a Γ''. La riunione dei grafici delle due superficie può essere grafico di una superficie σ continua ma eventualmente priva di derivate continue, oppure può non essere il grafico di una funzione o almeno di una funzione continua. Potremo ancora assumere che si tratti di una soluzione "generalizzata" se il grafico è quello di una funzione continua. Altrimenti il problema considerato non ammetterà soluzione.
Se, passando a un ulteriore caso estremo, totalmente diverso, la curva Γ è ovunque caratteristica, conducendo per un punto di essa una curva Λ, ovunque non caratteristica, si potranno condurre le caratteristiche dai punti di Λ costruendo così una soluzione passante per Γ. Ma di curve come la Λ ce ne sono infinite e quindi ci saranno infinite soluzioni al problema di Cauchy,

se la curva Γ iniziale è ovunque caratteristica. Abbiamo dunque dimostrato che il problema di Cauchy per un'equazione quasi lineare del prim'ordine può avere una e una sola soluzione locale, oppure può non avere soluzione o averne infinite. (Si veda, più avanti, il paragrafo 2.7 su esempi d'onde d'urto.)

2.5 Equazioni lineari del prim'ordine

Esamineremo ora il caso molto semplice delle equazioni lineari e omogenee in n variabili indipendenti.
Sia data l'equazione lineare

$$X_1(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+X_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \quad . \tag{2.25}$$

Supponiamo che $u_1,\ldots,u_k$ siano soluzioni di (2.25) e che $F\colon A\to\mathbf{R}$, con A aperto, sia una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Allora si ha

Teorema 2.5.1 *Nelle ipotesi sopra dette, se*

$$(u_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,u_k(x_1,\ldots,x_n))\in A \textit{ per } (x_1,\ldots,x_n)\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^n\,,$$

allora

$$u(x_1,\ldots,x_n)=F(u_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,u_k(x_1,\ldots,x_n))$$

è una soluzione dell'equazione (2.25).

Dimostrazione. Infatti si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\partial F}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial u_k}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_i}=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial u_l}\cdot\frac{\partial u_l}{\partial x_i} \quad .$$

Sostituendo nell'equazione data

$$X_1\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+X_n\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n}=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial u_l}(X_1\cdot\frac{\partial u_l}{\partial x_1}+\ldots+X_n\cdot\frac{\partial u_l}{\partial x_n})=0 \quad .$$

□

Ricordiamo che $n-1$ funzioni di n variabili si dicono *funzionalmente indipendenti* in un aperto $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$, se la matrice jacobiana

$$J\begin{pmatrix} u_1,\ldots,u_{n-1} \\ x_1,\ldots,x_n \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

ha caratteristica massima (cioè $n-1$) nell'aperto $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$. Vale allora

Teorema 2.5.2 *Siano* $(u_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,u_{n-1}(x_1,\ldots,x_n))$ *soluzioni funzionalmente indipendenti in* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ *della (2.25). Sia* $F \in \mathcal{C}^1(A)$ *una funzione definita su un opportuno aperto di* $\mathbf{R}^{n-1}$*. Supponiamo inoltre che* $X_1,\ldots,X_n$ *non si annullino contemporaneamente in alcun punto dell'aperto sul quale sono definiti (potremo pensare che sia* Ω*). Allora* $u = F(u_1,\ldots, u_{n-1})$ *è una soluzione dell'equazione (2.25).*

Dimostrazione. Infatti per il precedente teorema, u è una soluzione dell'equazione lineare e omogenea. Viceversa, sia v una qualsiasi soluzione dell'equazione data, da considerare insieme con le soluzioni u_l, per $l = 1,\ldots,n-1$. Avremo

$$\begin{cases} X_1 \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x_1} + \ldots + X_n \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x_n} & = 0 \\ X_1 \cdot \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n \cdot \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ X_1 \cdot \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} + \ldots + X_n \cdot \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} & = 0\,. \end{cases}$$

Poiché $X_1,\ldots,X_n$ non sono contemporaneamente nulli, in ogni punto di Ω i vettori riga della matrice $\dfrac{\partial(v,u_1,\ldots,u_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ del sistema, che, punto per punto, possiamo considerare come un sistema lineare nelle variabili $X_1,\ldots,X_n$, sono linearmente dipendenti. Cioè

$$\det J \begin{pmatrix} v, u_1, \ldots, u_{n-1} \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Per il teorema sulla dipendenza funzionale, ciò assicura che, essendo $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ funzionalmente indipendenti, esiste una funzione F di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $v = F(u_1,\ldots,u_{n-1})$. Questo fatto si può dimostrare direttamente come segue. Supponiamo che, per esempio, in Ω sia non nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} \quad .$$

Sia inoltre $X_n(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$. Si faccia il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi_1 & = & u_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{n-1} & = & u_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \xi_n & = & x_n \quad . \end{cases}$$

Allora si trova, utilizzando le nuove variabili

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial \xi_{n-1}} \cdot \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial \xi_n} \cdot \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i},$$

$(i = 1, \ldots, n)$. Ora $\frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} = 0$, per $i = 1, \ldots, n-1$, mentre vale 1, per $i = n$. Perciò si ha

$$0 = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} =$$
$$\frac{\partial v}{\partial \xi_1} \cdot (\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i}) + \ldots + \frac{\partial v}{\partial \xi_{n-1}} \cdot (\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i}) + X_n \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi_n},$$

e dunque

$$X_n \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi_n} = 0 \quad ,$$

cioè

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_n} = 0 \quad ,$$

in Ω, essendo ivi $X_n \neq 0$. In definitiva, se Ω ha sezioni connesse rispetto agli iperpiani coordinati, v non dipende da ξ_n ma solo da $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, cioè $v = F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, e quindi

$$v(x_1, \ldots, x_n) = F(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)) \quad . \square$$

Consideriamo ora il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie, associato alla (2.25)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad . \end{cases} \tag{2.27}$$

Una linea che in ogni punto soddisfi questo sistema (2.27) si dice una *linea caratteristica* associata alla (2.25) e il sistema (2.27) si dice il *sistema caratteristico* associato all'equazione (2.25). Rispetto al caso quasi lineare trattato in precedenza per l'equazione (2.11) e sistema (2.12), possiamo notare che qui manca l'equazione relativa alla funzione incognita u. Per completezza potremmo aggiungerla: $\frac{du}{dt} = 0$. Ci dice che la funzione incognita è costante lungo una linea caratteristica. In generale, una funzione $u = f(x_1, \dots, x_n)$ tale che $f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ sia costante lungo una linea caratteristica, si dice un *integrale primo* del sistema (2.27). È facile riconoscere che se $u = f(x_1, \dots, x_n)$ e $f(x_1, \dots, x_n)$ è un integrale primo, allora u è un integrale della (2.25). Infatti, tenendo conto che $f(x_1(t), \dots, x_n(t)) =$ costante, si ha

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} = 0\,.$$

Ricordando poi che $\dfrac{dx_i}{dt} = X_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, si ottiene

$$X_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad .$$

Si può concludere con il seguente

Teorema 2.5.3 *Se sono noti $n-1$ integrali primi funzionalmente indipendenti di (2.27),integrali che scriveremo nella forma $u_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, e F è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, allora*

$$u = F(u_1, \dots, u_{n-1})$$

è la soluzione generale dell'equazione (2.25). In altre parole, la soluzione completa del sistema delle caratteristiche (2.27) conduce alla soluzione completa dell'equazione (2.25). $\square$

2.6 Esempi ed esercizi

Ci dedicheremo alla risoluzione di alcuni esempi tipici d'equazioni lineari o quasi lineari del prim'ordine, usando il metodo delle caratteristiche.

Esempio 2.6.1 *Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 \quad \text{in } \Omega = \{(x, y) \colon x > 0, y > 0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(1, y) = y \text{ per } y \geq 0 \quad .$$

Il sistema caratteristico in questo caso è

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & x \\ \dfrac{dy}{dt} & = & 2y \\ \dfrac{du}{dt} & = & u^2 \quad , \end{array} \right. \tag{2.28}$$

con le condizioni iniziali lungo ogni caratteristica

$$\begin{cases} x(0) &= 1 \\ y(0) &= y_0 \\ u(0) &= u_0 \quad . \end{cases} \tag{2.29}$$

La soluzione immediata è

$$\begin{cases} x(t) &= e^t \\ y(t) &= y(0)e^{2t} \\ \dfrac{-1}{u} + \dfrac{1}{u(0)} &= t \quad , \end{cases} \tag{2.30}$$

Di qui si trova che l'equazione delle proiezioni delle linee caratteristiche sul piano x, y sono $y = y(0) \cdot x^2$ ossia $\dfrac{y}{x^2} = y(0) =$ costante. La costante varia da caratteristica a caratteristica; se consideriamo un punto $(x, y) \in \Omega$ esso interseca l'asse $x = 1$ nel punto $y(0) = \dfrac{y}{x^2}$. Si ha poi che $t = \log x$ e che $u(0) = y(0) = \dfrac{y}{x^2}$. Facilmente si trova $u(t) = \dfrac{y(0)}{1 - y(0)t}$, e, sostituendo i valori in termini di x e y, finalmente

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 - y \log x} \quad . \tag{2.31}$$

Verifichiamo che quella data sia la soluzione cercata. Se $x = 1$, si trova immediatamente $u(1, y) = y$. Si trova poi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y(2x - \frac{y}{x})}{(x^2 - y \log x)^2} \quad ,$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{(x^2 - y \log x)^2} \quad .$$

E finalmente

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2}{(x^2 - y \log x)^2} = u^2 \quad .$$

Esempio 2.6.2 *Usando il metodo delle caratteristiche, si determini per i valori di x e y tali che $x \geq 0$, $y \geq 0$ la soluzione dell'equazione alle derivate parziali*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = u \quad \text{in } \Omega = \{(x, y) \colon x > 0, y > 0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(x, 0) = x^2 \text{ per } x \geq 0 \quad .$$

Il sistema caratteristico si scrive

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & y \\ \dfrac{dy}{dt} & = & x \\ \dfrac{du}{dt} & = & u \quad , \end{cases}$$

con le condizioni iniziali lungo ogni caratteristica

$$\begin{cases} x(0) & = & \xi \\ y(0) & = & 0 \\ u(0) & = & \xi^2 \quad . \end{cases}$$

Abbiamo indicato, per maggiore chiarezza, con ξ il valore iniziale $x(0)$ lungo ogni assegnata caratteristica. Sul piano x, y, l'equazione della linea caratteristica, ottenuta moltiplicando la prima equazione per x e la seconda per $-y$ e sommando, è

$$x^2 - y^2 = x(0)^2 - y(0)^2 = \xi^2 \quad .$$

Inoltre, derivando la prima equazione e tendo conto della seconda, si trova pure

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0 \quad .$$

Dunque la soluzione è del tipo $x(t) = Ae^t + Be^{-t}$ e $y(t) = Ae^t - Be^{-t}$, con le condizioni $x(0) = \xi$ e $y(0) = 0$. Si trova finalmente $x(t) = \frac{\xi}{2} \cdot (e^t + e^{-t}) = \xi \cosh(t)$ e $y(t) = \xi \,\mathrm{senh}(t)$. Per e^t si trovano i valori

$$e^t = \frac{x}{\xi} \pm \sqrt{\frac{x^2}{\xi^2} - 1} \quad .$$

Poiché ci interessano le soluzioni per $t > 0$ e dunque $e^t > 1$, sceglieremo il segno $+$, e quindi, $t = \log \dfrac{x + \sqrt{x^2 - \xi^2}}{\xi} = \log \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, ricordando che ci interessano le soluzioni per $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Si ottiene poi per la funzione incognita lungo le caratteristiche $u(t) = u(0)\, e^t = \xi^2 \cdot \dfrac{x + y}{\xi}$, cioè

$$u(x, y) = (x + y)\sqrt{x^2 - y^2} \quad .$$

Si verifica immediatamente che $u(x,0) = x^2$; inoltre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} &= \dfrac{2x^2 + xy - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} &= \dfrac{x^2 - xy - 2y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} \end{cases} ,$$

e, finalmente

$$y\,\frac{\partial u}{\partial x} + x\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2 y - xy^2 + x^3 - y^3}{\sqrt{x^2 - y^2}} = u \quad .$$

Esempio 2.6.3 *Usando il metodo delle caratteristiche, si determini per i valori di x e y tali che $x \geq 0$, $y \leq 0$ la soluzione dell'equazione alle derivate parziali*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 \qquad \text{in } \Omega = \{(x,y)\colon x > 0, y < 0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(x,0) = x^2 \ \text{per}\, x \geq 0 \quad .$$

Il sistema caratteristico si scrive

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} &= -x \\[2ex] \dfrac{du}{dt} &= u^2 \quad , \end{cases}$$

con le condizioni iniziali lungo ogni caratteristica

$$\begin{cases} x(0) &= \xi \\ y(0) &= 0 \\ u(0) &= \xi^2 \quad . \end{cases}$$

Sul piano x, y, l'equazione della linea caratteristica, ottenuta moltiplicando la prima equazione per x e la seconda per y e sommando, è

$$x^2 + y^2 = x(0)^2 + y(0)^2 = \xi^2 \quad .$$

Inoltre, derivando la prima equazione e tendo conto della seconda, si trova pure

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0 \quad .$$

Dunque la soluzione è del tipo $x(t) = A\cos t + B\,\mathrm{sen}\,t$ e $y(t) = -A\,\mathrm{sen}\,t + B\cos t$, con le condizioni $x(0) = \xi$ e $y(0) = 0$. Si trova finalmente $x(t) = \xi\cos(t)$ e $y(t) = -\xi\,\mathrm{sen}\,(t)$, essendo $\xi = \sqrt{x^2+y^2}$. L'integrazione di $\frac{du}{dt} = u^2$ fornisce $u(t) = \dfrac{u(0)}{1-u(0)\cdot t}$. Ora poiché ci interessano i valori di $x \geq 0$ e di $y \leq 0$, la scelta $t = \arccos\frac{x}{\xi}$ con $0 \leq t \leq \pi/2$ è quella adatta. Allora varrà $u(t) = \dfrac{\xi^2}{1-\xi^2\cdot t}$ e quindi

$$u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{1-(x^2+y^2)\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \quad .$$

Si trova immediatamente che $u(x,0) = x^2$ (si ricordi che $\arccos(1) = 0$). Per comodità di scrittura, indichiamo con D il denominatore della frazione che rappresenta $u(x,y)$. Allora si trova

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \dfrac{2x+y(x^2+y^2)}{D^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \dfrac{2y-x(x^2+y^2)}{D^2} \end{cases} \quad .$$

Converrà ricordare, per evitare errori, che, nel campo di variabilità considerato, $\sqrt{y^2} = -y$. È allora facile riconoscere che

$$y\,\frac{\partial u}{\partial x} - x\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)^2}{D^2} = u^2 \quad .$$

Lasciamo i seguenti esercizi alla buona volontà del lettore

Esercizio 2.6.1 . *Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = -u \quad \text{in } \Omega = \{(x,y)\colon x>1, y>0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(1,y) = y \text{ per } y \geq 0 \quad .$$

Esercizio 2.6.2 . *Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali*

$$2y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = u \quad \text{in } \Omega = \{(x,y)\colon x>0, y<0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(x,0) = x \text{ per } x > 0 \quad .$$

Esercizio 2.6.3 . *Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - 2x\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 \quad \text{in } \Omega = \{(x,y)\colon x>0, y<0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(x,0) = x^2 \text{ per } x > 0 \quad .$$

Esercizio 2.6.4 . *Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali*

$$4y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = u \quad \text{in } \Omega = \{(x,y)\colon x>0, y<0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(x,0) = x^2 \text{ per } x > 0 \quad .$$

Esercizio 2.6.5 . *Usando il metodo delle caratteristiche, si determini la soluzione dell'equazione alle derivate parziali*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + 4x\frac{\partial u}{\partial y} = u \quad \text{in } \Omega = \{(x,y)\colon x>0, y>0\} \quad ,$$

che soddisfa la condizione

$$u(0,y) = y \text{ per } y > 0 \quad .$$

2.7 Onde di rarefazione e onde d'urto

Studieremo il caso di un'equazione quasi lineare particolare, detta equazione di Burger, mostrando come, nel caso d'equazioni non lineari, la discontinuità dei dati iniziali si propaghi nel tempo. Inoltre mostreremo come, in certi casi, dati iniziali non discontinui diano luogo a soluzioni che manifestano discontinuità (dette onde d'urto). Questo fatto mette in evidenza che l'esistenza di una soluzione locale affermata nel teorema (2.4.1) è effettivamente locale e non è estendibile indefinitamente nel tempo anche in presenza di funzioni lisce.
Consideriamo il seguente problema ai valori iniziali. È data l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \tag{2.32}$$

con la condizione iniziale

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 2 & \text{se} \quad x > 0 \quad . \end{cases} \tag{2.33}$$

Si osservi che la funzione non è estendibile ad una funzione continua su tutto **R**. Diremo brevemente che il dato iniziale è discontinuo. Il sistema caratteristico è

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & u \\ \\ \dfrac{du}{dt} & = & 0 \quad . \end{cases} \tag{2.34}$$

(Abbiamo identificato t con la coordinata corrente lungo la caratteristica. D'altra parte, chiamando s la coordinata corrente della caratteristica, la prima equazione del sistema caratteristico è $\dfrac{dt}{ds} = 1$ e quindi $t = s - s_0$, cioè t coincide con s, a meno di una costante). Dunque la funzione u è costante lungo ogni caratteristica. Precisamente vale costantemente 1 lungo le caratteristiche uscenti dai punti $x(0) < 0$ e vale 2 lungo le caratteristiche uscenti dai punti $x(0) > 0$. Tenuto conto di ciò, $x(t) = u(x(0))t + x(0)$. Le linee caratteristiche uscenti dai punti $\xi = x(0) < 0$ sono $x(t) = t + \xi$ se $\xi < 0$, sono $x(t) = 2t + \xi$, se $\xi > 0$. Cioè $u(x,t) = 1$, se $\xi = x - t < 0$, $u(x,t) = 2$, se $x - 2t > 0$. Tenendo conto che $t > 0$, ciò si può anche scrivere

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \dfrac{x}{t} < 1 \\ \\ 2 & \text{se} \quad \dfrac{x}{t} > 2 \quad . \end{cases} \tag{2.35}$$

Quando $1 \le \dfrac{x}{t} \le 2$ la soluzione non è definita. Possiamo estendere in modo continuo la soluzione imponendo che valga $\frac{x}{t}$ nella zona in cui non è individuata dal valore iniziale. Ciò equivale a pensare che dal punto $x(0) = 0, t = 0$ escano infinite caratteristiche ognuna avente equazione $\dfrac{x}{t} = \alpha$, con $1 \le \alpha \le 2$.

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \dfrac{x}{t} < 1 \\ \dfrac{x}{t} & \text{se} \quad 1 \le \dfrac{x}{t} \le 2 \\ 2 & \text{se} \quad \dfrac{x}{t} > 2 \quad . \end{cases} \tag{2.36}$$

Una situazione di questo tipo, nella quale le linee caratteristiche si distanziano una dall'altra, si dirà un'onda di "rarefazione".

Consideriamo invece una situazione opposta nella quale le linee caratteristiche tendano ad accavallarsi e sovrapporsi, situazione che si dirà "onda d'urto". Consideriamo la stessa equazione di Burger

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ,$$

con la condizione iniziale

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} \quad .$$

Le linee caratteristiche sono in questo caso

$$x(t) = \begin{cases} 2t + \xi & \text{se} \quad \xi < 0 \\ t + \xi & \text{se} \quad \xi > 0 \end{cases} \quad . \tag{2.37}$$

Esse portano i valori 2 e rispettivamente 1 per $u(x,t)$. Se $x > t$ uno stesso punto del piano viene raggiunto da entrambe le caratteristiche e sostanzialmente non possiamo decidere quale sia il valore da attribuire alla soluzione in quel punto. Si può concludere che, essendo in presenza di dati discontinui, la descrizione del fenomeno fatta con il calcolo differenziale non è più adeguata. Dovremo modificare la modellizzazione del fenomeno, passando ad una formulazione integrale, per trovare una soluzione soddisfacente.
Più in generale, sia data l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \tag{2.38}$$

con la condizione iniziale

$$u(x,0) = f(x) \quad . \tag{2.39}$$

L'equazione della caratteristica uscente dal punto $x(0)$ è $x(t) = f(x(0)) \cdot t + x(0)$. Supponiamo che le caratteristiche per due punti vicini $x(0)$ e $x(0) + \Delta x$ si incontrino. Allora avremo

$$\begin{cases} x_1(t) &= c(f(\xi))t + \xi \\ x_2(t) &= c(f(\xi + \Delta x))t + \xi + \Delta x \end{cases} \quad . \tag{2.40}$$

Le due linee si incontrano se $c(f(\xi+\Delta x)) < c(f(\xi))$, per $\Delta x > 0$. L'incontro avviene al tempo $t = -\dfrac{\Delta x}{c(f(\xi + \Delta x)) - c(f(\xi))}$. Se prendiamo il limite per $\Delta x \to 0$, si trova che l'incontro avviene al tempo

$$t = -\frac{1}{c'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)} \quad , \tag{2.41}$$

ammesso che $c(u)$ e $f(\xi)$ siano derivabili, cosa che supporremo senz'altro. Affinché sia $t > 0$ come dev'essere, dovrà verificarsi dunque che $c'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) < 0$. Dunque, anche in presenza di dati iniziali derivabili con continuità, può verificarsi l'incontro di caratteristiche e quindi l'insorgere di onde d'urto. Per esempio, se è data l'equazione usuale

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ,$$

con la condizione iniziale

$$u(x,0) = -x \quad ,$$

l'equazione delle caratteristiche è $x(t) = -\xi \cdot t + \xi$, essendo $\xi = x(0) = u(x,0)$. Perciò

$$u(x,t) = -\frac{x}{t-1} \quad .$$

Si constata che tutte le linee caratteristiche passano per $t = 1$; la soluzione non è definita in $t = 1$. A partire da quell'istante si sviluppa un'onda d'urto. Ciò è in accordo con il fatto che $c(u) = u$ e $f(\xi) = -\xi$. Perciò $\dfrac{dc(f(\xi))}{d\xi} = -1$ e quindi si ottiene, in accordo con la (2.41), $t = 1$ come istante nel quale si sviluppa l'onda d'urto. L'onda d'urto ha equazione $t = 1$. Si noti infatti che passando attraverso questa linea, in corrispondenza ad un valore $x_0 \neq 0$ della coordinata x, si passa dal valore di $u \approx \frac{x_0}{\varepsilon}$ al valore $\approx -\frac{x_0}{\varepsilon}$, con un salto di valore$\approx 2\frac{|x_0|}{\varepsilon}$; qui $\varepsilon = |t-1|$ e si passa da $(x_0, 1-\varepsilon)$ a $(x_0, 1+\varepsilon)$.
Se il dato iniziale è già discontinuo, l'onda d'urto si sviluppa sin dall'istante $t = 0$. Vediamo come si possa definire la posizione dell'onda d'urto (ossia della discontinuità della soluzione). Diciamo $x_u(t)$ la posizione della discontinuità, e siano $\alpha < x_u(t) < \beta$. Supponiamo che l'equazione di Burger si possa scrivere in forma conservativa, cioè che il termine $c(u)\frac{\partial u}{\partial x}$ si possa scrivere come $\frac{\partial q(u)}{\partial x}$. La forma differenziale dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0 \quad ,$$

è adeguata quando $u(x,t)$ è funzione continua e derivabile con continuità delle sue variabili. In particolare $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\alpha^\beta u(x,t)\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{\partial u}{\partial t}\,dx$ se u e $\frac{\partial u}{\partial t}$ sono continue. Se ciò non vale, la forma corretta dell'equazione è quella integrale. Precisamente

$$\frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta u(x,t)\,dx + \int_\alpha^\beta \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0 \quad .$$

Tenuto conto della discontinuità in $x_u(t)$, otteniamo

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha}^{x_u(t)} u(x,t)\,dx + \frac{d}{dt}\int_{x_u(t)}^{\beta} u(x,t)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0 \quad .$$

Se indichiamo con $u_l = \lim_{\alpha\to x_u(t)^-} u(x,t)$ e con $u_r = \lim_{\beta\to x_u(t)^+} u(x,t)$, otterremo

$$\int_{\alpha}^{x_u(t)} \frac{\partial u}{\partial t}\,dx + u_l x_u'(t) + \int_{x_u(t)}^{\beta} \frac{\partial u}{\partial t}\,dx - u_r x_u'(t) + q(u(\beta,t)) - q(u(\alpha,t)) = 0 \quad .$$

Se indichiamo con $[u] = u_r - u_l$ e con $[q] = q(u_r) - q(u_l)$ i salti delle ripettive quantità attraverso l'onda d'urto, tenendo conto che gli integrali da α a $x_u(t)$ e da $x_u(t)$ a β tendono a 0 per $\alpha \to x_u(t)$ e per $\beta \to x_u(t)$, si ottiene

$$u_l x_u'(t) - u_r x_u'(t) + q(u_r) - q(u_l) = 0 \quad ,$$

e quindi

$$x_u'(t) = \frac{[q]}{[u]} \quad . \tag{2.42}$$

Si noti che quanto sopra discusso vale purché $u(x,t)$ sia continua con le sue derivate prime per (x,t) nel dominio della funzione, separatamente per $x < x_u(t)$ e per $x > x_u(t)$, rispettivamente.
Nel caso del quale ci siamo di sopra occupati, avente condizione iniziale

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} \quad ,$$

avremo $u_r = 1$, $u_l = 2$ e quindi $[u] = -1$; $q(u) = \frac{u^2}{2}$ e $[q] = -\frac{3}{2}$. Dunque $x_u'(t) = \frac{3}{2}$ e $x_u(t) = \frac{3}{2}\cdot t$. Definita la posizione dell'onda d'urto nel tempo, avremo finalmente una descrizione completa della soluzione come segue

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x < \frac{3}{2}\cdot t \\ \\ 1 & \text{se} \quad x > \frac{3}{2}\cdot t \quad . \end{cases} \tag{2.43}$$

2.8 Classificazione delle equazioni del second'ordine a coefficienti costanti

Procederemo alla classificazione delle equazioni del second'ordine in due variabili indipendenti. Supporremo, per semplicità, che i coefficienti dell'equazione siano costanti. La forma generale dell'equazione è dunque del tipo

$$a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy} + d\,u_x + e\,u_y + f\,u = g(x,y)\,, \tag{2.44}$$

con a, b, c, d, e, f costanti reali, se non esplicitamente detto altrimenti. Cominciamo a considerare i termini del second'ordine, che costituiscono un operatore differenziale del second'ordine. Si intende cioè che a ogni funzione $u \in \mathcal{C}^2(A)$ viene associata la funzione continua sull'aperto $A \subseteq \mathbf{R}^2$ data da

$$L(u) := a\,u_{xx}(x,y) + 2b\,u_{xy}(x,y) + c\,u_{yy}(x,y) \in \mathcal{C}^0(A)\,. \tag{2.45}$$

Dunque $L: \mathcal{C}^2(A) \to \mathcal{C}^0(A)$ è un operatore lineare, come facilmente si verifica. Conviene anche introdurre gli operatori differenziali $D_x u := \frac{\partial u}{\partial x}$ e $D_y u := \frac{\partial u}{\partial y}$. Allora, avremo $L = a\,D_xD_x + 2b\,D_xD_y + c\,D_yD_y$. All'operatore L si può associare il *polinomio caratteristico*

$$F(\lambda) = a\,\lambda^2 + 2b\,\lambda + c\,. \tag{2.46}$$

Se λ_1 e λ_2 sono le radici del polinomio caratteristico, è ben noto che esso si può fattorizzare come segue: $F(\lambda) = a \cdot (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2)$. Si può pensare ad un'analoga fattorizzazione dell'operatore L.

$$L = a(D_x - \lambda_1 D_y)(D_x - \lambda_2 D_y)\,.$$

Ciò sarà giustificato se accade che $a(D_x - \lambda_1 D_y)(D_x - \lambda_2 D_y)u = a(D_x - \lambda_2 D_y)(D_x - \lambda_1 D_y)u$, cosicché non importa in quale ordine i due operatori lineari vengano applicati. Ma è facile verificare che i due operatori sono permutabili e che quindi noi potremo accettare la fattorizzazione di L, quale che sia l'ordine dei due fattori lineari. Osserviamo poi che se $(D_x - \lambda_1 D_y)u = 0$ allora $L(u) = 0$; lo stesso accade se $(D_x - \lambda_2 D_y)u = 0$. L'equazione

$$(D_x - \lambda_1 D_y)u = 0$$

ha il sistema caratteristico

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -\lambda_1 \end{cases}.$$

È immediato trovare la soluzione: $x = t + x_0$, $y = -\lambda_1 t + y_0$. Dunque l'equazione delle linee caratteristiche è $y + \lambda_1 x = \text{cost.}$
Analogamente, l'equazione

$$(D_x - \lambda_2 D_y)u = 0$$

ha come famiglia delle caratteristiche $y + \lambda_2 x = \text{cost.}$ Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ le due famiglie sono linearmente e quindi funzionalmente indipendenti. Supposto dunque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, operiamo il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi &= y + \lambda_1 x \\ \eta &= y + \lambda_2 x \quad . \end{cases} \tag{2.47}$$

Posto $u(x, y) = \tilde{u}(\xi(x, y), \eta(x, y))$, cioè pensando u come funzione di x e y attraverso la dipendenza di ξ e η da x, y, si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} &= \tilde{u}_\xi \cdot \xi_x + \tilde{u}_\eta \cdot \eta_x = \tilde{u}_\xi \lambda_1 + \tilde{u}_\eta \lambda_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} &= \tilde{u}_\xi \cdot \xi_y + \tilde{u}_\eta \cdot \eta_y = \tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta \quad . \end{cases}$$

Formalmente, per gli operatori, si ottiene

$$\begin{cases} D_x &= \lambda_1 \cdot D_\xi + \lambda_2 \cdot D_\eta \\ D_y &= D_\xi + D_\eta \quad . \end{cases} \tag{2.48}$$

E dunque

$$D_x - \lambda_1 D_y = (\lambda_2 - \lambda_1) D_\eta \,,$$
$$D_x - \lambda_2 D_y = (\lambda_1 - \lambda_2) D_\xi \,.$$

Finalmente, si ottiene

$$L(u) := -a\,(\lambda_2 - \lambda_1)^2\, D_\eta D_\xi u \,. \tag{2.49}$$

Se $\lambda_2 = \lambda_1 \neq 0$, la sostituzione da fare è invece

$$\begin{cases} \xi &= y + \lambda_1 x \\ \eta &= y \quad . \end{cases} \tag{2.50}$$

Si trova allora

$$\begin{cases} D_x &= \lambda_1 \cdot D_\xi \\ D_y &= D_\xi + D_\eta \quad , \end{cases}$$

e

$$L(u) := -a\,\lambda_1^2\,D_\eta D_\eta u\,. \tag{2.51}$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $L(u) = a\,D_x D_x$, è già in forma ridotta.

Definizione . Diremo che l'operatore differenziale L è *iperbolico* se $b^2 - ac > 0$; in questo caso λ_1 e λ_2 sono due numeri reali e distinti.
L si dirà *ellittico* se $b^2 - ac < 0$; in questo caso λ_1 e λ_2 sono due numeri complessi e coniugati.
L si dirà *parabolico* se $b^2 - ac = 0$; in questo caso $\lambda_1 = \lambda_2$.

Le rette $y + \lambda_1 x = \text{cost}$ e $y + \lambda_2 x = \text{cost}$ si dicono le *caratteristiche* dell'operatore L. L'operatore iperbolico ha due famiglie di caratteristiche reali; quello parabolico una, quello ellittico ha due famiglie di caratteristiche complesse. L'operatore iperbolico si trasforma, nelle nuove variabili, in $-a\,(\lambda_2 - \lambda_1)^2 D_\xi D_\eta$, e quello parabolico in $a\,\lambda_1^2 D_\eta D_\eta$. Anche l'operatore ellittico ha la forma dell'iperbolico, ma le nuove variabili ξ e η sono complesse coniugate se i coefficienti dell'equazione (2.44) sono reali. Sarà allora conveniente procedere ad un'ulteriore trasformazione, ponendo $\xi = X + i\,Y$ e $\eta = X - i\,Y$. Allora, operando come in precedenza, si trova facilmente $D_X = D_\xi + D_\eta$ e $D_Y = i\,D_\xi - i\,D_\eta$. Perciò

$$D_X D_X + D_Y D_Y = 4\,D_\xi D_\xi \quad .$$

Allora l'operatore ellittico, nelle nuove variabili, diviene

$$L(u) := -\frac{a}{4}\,(\lambda_2 - \lambda_1)^2\,(D_X D_X + D_Y D_Y)u\,. \tag{2.52}$$

Rispetto alle nuove variabili introdotte, che ora continueremo a indicare con x e y per comodità, l'equazione di partenza $L(u) + dD_x u + eD_y u + fu = g(x,y)$ assumerà nei casi considerati le seguenti forme

$$\begin{array}{lcll} u_{xy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u & = & f(x,y) & \text{(caso iperbolico)} \\ u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u & = & f(x,y) & \text{(caso ellittico)} \\ u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u & = & f(x,y) & \text{(caso parabolico)}\,. \end{array} \tag{2.53}$$

Possiamo semplificare ulteriormente l'equazione cambiando opportunamente la funzione incognita. Poniamo $u(x,y) = q(x,y)\cdot v(x,y)$, dove $v(x,y)$ sarà la nuova funzione incognita e $q(x,y)$ sarà determinata in modo che l'equazione assuma la forma più semplice possibile. Tenuto conto di ciò, per l'equazione iperbolica si trova

$$q\cdot v_{xy} + (q_y + \alpha q)\cdot v_x + (q_x + \beta q)\cdot v_y + (q_{xy} + \alpha q_x + \beta q_y + \gamma q)v = f\,.$$

Se si sceglie $q = e^{-\alpha y - \beta x}$, allora $(q_y + \alpha q) = 0$ e $(q_x + \beta q) = 0$. Allora l'equazione diviene

$$v_{xy} + (\gamma - \alpha\beta)v = f(x,y)/q(x,y)\,.$$

Operando in modo analogo anche per le equazioni ellittiche e paraboliche, si trovano finalmente le seguenti *forme canoniche*

$$\begin{array}{lcll} v_{xy} + kv & = & \tilde{f}(x,y) & \text{(caso iperbolico)} \\ v_{xx} + v_{yy} + kv & = & \tilde{f}(x,y) & \text{(caso ellittico)} \\ v_{yy} + \beta v_x + kv & = & \tilde{f}(x,y) & \text{(caso parabolico)}\,. \end{array} \tag{2.54}$$

2.9 Un esempio d'equazione parabolica: l'equazione del calore

Consideriamo la più semplice delle equazioni paraboliche a coefficienti costanti e omogenea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{2.55}$$

che si dirà l'equazione del calore in una variabile spaziale. Per quest'equazione considereremo il seguente problema "misto" (cioè ai valori iniziali e al contorno). Trovare una soluzione dell'equazione (2.55) che soddisfa inoltre le seguenti condizioni iniziali e al contorno, per $(x,t) \in [0,l] \times [0,+\infty[$

$$\begin{cases} u(x,0) & = & g(x),\ 0 \le x \le l \\ u(0,t) & = & f_1(t),\ t \ge 0 \\ u(l,t) & = & f_2(t),\ t \ge 0 \quad . \end{cases} \tag{2.56}$$

Indicheremo con $Q = \{(x,y)\colon 0 \le x \le l, t \ge 0\}$, con $Q_T = \{(x,y)\colon 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ e con $\Gamma_T = \{0\} \times [0,T] \cup [0,l] \times \{0\} \cup \{l\} \times [0,T]$. Consideremo poi il problema di determinare una soluzione di (2.55) nei punti interni di Q_T, con condizioni iniziali e al contorno quali sono date in (2.56), ma limitate ai valori $0 \le t \le T$. Supporremo inoltre che $g(x)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ siano funzioni continue e che inoltre $g(0) = f_1(0)$ e $g(l) = f_2(0)$.
Dal punto di vista fisico il problema si può interpretare come quello di determinare la distribuzione di temperatura all'interno di una barra omogenea di lunghezza l data, essendo assegnata la distribuzione di temperatura iniziale $g(x)$ ed essendo assegnate le temperature $f_1(t)$ e $f_2(t)$ ai due estremi della barra. È chiaro che sono state scelte opportune unità di misura per il tempo e lo spazio, affinché i vari coefficienti che intervengono nella formulazione fisica del problema diano luogo a un valore unitario che moltiplica il

termine $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Condizioni al contorno più generali che si possono considerare sono del tipo $\alpha u(x_i,t)+\beta\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t)=f_i(t)$ per $t\geq 0$ o per $0\leq t\leq T$, $i=1,2$, con $x_1=0$ e $x_2=l$. Qui si controlla oltre alla temperatura negli estremi della barra, anche il flusso di calore che passa ai due estremi. Si ha il seguente importante risultato

Teorema 2.9.1 (Principio di massimo (minimo)). *Se (2.55) ha una soluzione nei punti interni di Q_T che soddisfa le condizioni al contorno e iniziali (2.56) ed è continua in Q_T allora tale soluzione assume il suo valore massimo (minimo) su Γ_T.*

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema per il massimo. La validità dell'affermazione per il minimo si deduce da quella per il massimo passando a $-u$ e osservando che, essendo l'equazione (2.55) lineare, se u è una soluzione, anche $-u$ lo è; inoltre il massimo di $-u$ è (cambiando il segno) il minimo di u. Sia M il massimo di $u(x,t)$ in Q_T e sia m il massimo di $u(x,t)$ su Γ_T. Osserviamo che essendo Q_T e Γ_T chiusi e limitati in $\mathbf{R}^2$ e quindi compatti, ed essendo per ipotesi $u(x,t)$ continua in Q_T, allora tali massimi esistono. Supponiamo, per assurdo, $M>m$ e diciamo (x_0,t_0) $0<x_0<l$ e $0<t_0\leq T$ il punto in cui $u(x_0,t_0)=M$. Consideriamo ora la funzione ausiliaria

$$v(x,t)=u(x,t)+\frac{M-m}{4l^2}(x-x_0)^2\,. \tag{2.57}$$

Si valuta facilmente che lungo Γ_T, $v(x,t)\leq m+\frac{M-m}{4}=\frac{M+3m}{4}<M$, mentre $v(x_0,t_0)=M$. Dunque anche $v(x,t)$ (che è continua) assume il suo valore massimo in Q_T in un certo punto $(x_1,t_1)\notin\Gamma_T$. Poiché nei punti che non stanno su Γ_T esistono la derivata seconda rispetto a x due volte e la derivata rispetto a t, in un punto di massimo avremo: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\leq 0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial t}\geq 0$ $(=0$ se $t_1<T)$. Perciò in (x_1,t_1) vale

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\geq 0\,. \tag{2.58}$$

Ma il calcolo diretto, in base alla definizione (tenendo conto che $u(x,t)$ è soluzione della (2.55)) ci dà

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{M-m}{2l^2}=-\frac{M-m}{2l^2}<0\,. \tag{2.59}$$

Questa contraddizione nasce dal supporre che sia $M>m$. Dunque deve essere $M=m$ e quindi il massimo della soluzione si raggiunge in Γ_T. Analogamente si procede per il minimo. □

Seguono i seguenti due immediati corollari

Corollario 2.9.1 *La soluzione di (2.55) e (2.56) è unica in* Q_T.

Dimostrazione. Se u_1 e u_2 sono due soluzioni, amche la loro differenza $u = u_1 - u_2$ è una soluzione dell'equazione lineare (2.55) e soddisfa le condizioni (2.56) con dati nulli; cioè $g(x) = f_1(t) = f_2(t) = 0$. Dunque u vale 0 su Γ_T, e quindi il suo valore massimo e minimo su Γ_T sono 0. Ma allora dal principio di massimo segue

$$0 \leq u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq 0\,.$$

Ossia $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. $\Box$

Osservazione 2.9.1 *L'unicità della soluzione si può in realtà asserire per ogni* $t \geq 0$. *Infatti dato un valore di* $t > 0$ *basterà assegnare un* $T > t$ *e ricordare che la soluzione è unica in* Q_T. *Dunque* $u_1(x,t) = u_2(x,t) \quad \forall\, t \geq 0$ e $\forall\, 0 \leq x \leq l$.

Corollario 2.9.2 *La soluzione di (2.55) e (2.56) dipende in modo continuo dai dati iniziali e al contorno.*

Dimostrazione. Supponiamo che siano assegnati valori iniziali e al contorno $g^\star, f_1^\star, f_2^\star$ tali che $|g(x)-g^\star(x)| < \varepsilon$, per $0 \leq x \leq l$ e $|f_1(t)-f_1^\star(t)| < \varepsilon$, $|f_2(t) - f_2^\star(t)| < \varepsilon$ per $0 \leq t \leq T$. Detta $u^\star(x,t)$ la soluzione relativa ai dati modificati *, anche $u-u^\star$ è una soluzione dell'equazione (2.55), avente come dati la differenza dei due. Per il principio di massimo (minimo) è allora evidente che

$$|u^\star(x,t) - u(x,t)| < \varepsilon \;\forall\,(x,t) \in Q_T\,.$$

Osservazione 2.9.2 *Il principio di massimo (minimo) è vero, e si dimostra con lo stesso ragionamento, anche se l'equazione è quella più generale*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u\ , \tag{2.60}$$

verificata per (x,t) *punto interno di* $Q_T = \overline{\Omega} \times [0,T]$ *con* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *aperto limitato semplicemente connesso avente frontiera* $\partial\Omega$ *sufficientemente liscia,*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\,,$$

e con le condizioni iniziali

$$u(x,0) = g(x) \quad x \in \overline{\Omega}\ , \tag{2.61}$$

e iniziali

$$u(y,t) = f(y) \quad y \in \partial\Omega \ 0 \leq t \leq T\,. \tag{2.62}$$

Qui f e g si suppongono funzioni continue.

Definizione. Un problema ai valori iniziali e al contorno si dice *ben posto secondo Hadamard* se esso ammette una e una sola soluzione dipendente in modo continuo dai dati.

Abbiamo verificato che, per il problema (2.55) con le condizioni iniziali e al contorno (2.56), la soluzione se c'è è unica e dipende in modo continuo dai dati. Non abbiamo ancora dimostrato l'esistenza della soluzione. Lo faremo ora con il metodo di Fourier della *separazione delle variabili*, che però è applicabile solo se le condizioni al contorno sono omogenee. Con metodi che verranno sviluppati in seguito, questa limitazione potrà essere eliminata. Tuttavia, in alcuni casi particolari, la limitazione stessa può essere superata in modo elementare.

Si supponga di conoscere una funzione $v(x,t)$ che soddisfa la (2.55) e tale che inoltre $v(0,t) = f_1(t)$ e $v(l,t) = f_2(t)$ (nulla si chiede sui valori iniziali). Allora, se $u(x,t)$ è una soluzione del problema completo di condizioni iniziali e al contorno, $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ soddisfa l'equazione differenziale, condizioni al contorno omogenee: $w(0,t) = w(l,t) = 0$ e condizioni iniziali $w(x,0) = g(x) - v(x,0)$. Quindi se sappiamo trovare una soluzione del problema con condizioni al contorno omogenee, $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$ è la soluzione del problema assegnato. In particolare, se $f_1(t) = T_1 = \text{cost}$ e se $f_2(t) = T_2 = \text{cost}$, $v(x,t) = \dfrac{T_2 - T_1}{l} \cdot x + T_1$ soddisfa le condizioni al contorno e, banalmente, all'equazione differenziale ($\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = 0$ e $\Delta v(x,t) = 0$).

Teorema 2.9.2 *Data l'equazione differenziale (2.55) e le condizioni iniziali e al contorno*

$$\begin{cases} u(x,0) &= g(x),\ 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) &= 0,\ t \geq 0 \\ u(l,t) &= 0,\ t \geq 0 \quad , \end{cases} \tag{2.63}$$

esiste una soluzione se $g(x)$ si suppone continua con derivata prima a tratti continua ($g'(x)$ è continua tranne che in un numero finito di punti, nei quali esistono finiti i limiti della derivata da destra e da sinistra).

Dimostrazione. Cerchiamo una soluzione "a variabili separate", cioè una funzione del tipo

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)\,,$$

prodotto di una funzione della sola x e di una della sola t. Per un'equazione di questo tipo, l'equazione differenziale si scrive

$$X(x) \cdot T'(t) - X''(x) \cdot T(t) = 0 \quad .$$

Poiché cerchiamo una soluzione che non sia identicamente nulla, supporremo che per qualche x e per qualche t siano $X(x) \neq 0$ e $T(t) \neq 0$. In un intorno dei punti detti, potremo dividere i due membri dell'equazione per $X(x) \cdot T(t)$, ottenendo

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0 \quad ,$$

ossia

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{ cost} \quad .$$

Infatti poiché abbiamo una funzione della sola t che uguaglia una funzione della sola x, il valore comune delle due funzioni è una costante (reale). Relativamente alla funzione $X(x)$ deve valere l'equazione

$$X''(x) - \lambda X(x) \quad ,$$

con le condizioni al contorno $X(0) = X(l) = 0$. A seconda dei valori di λ si trovano le seguenti soluzioni.
(a) Se $\lambda > 0$, si trova $X(x) = A \cdot e^{x\sqrt{\lambda}} + Be^{-x\sqrt{\lambda}}$; imponendo le condizioni al contorno, si trova $A = B = 0$ e dunque una soluzione identicamente nulla, che non ci interessa.
(b) Se $\lambda = 0$, l'equazione differenziale ha soluzione $X(x) = Ax + B$. Imponendo le condizioni al contorno, si trova nuovamente $A = B = 0$ e dunque ancora una soluzione identicamente nulla, che non ci interessa.
(c) Se $\lambda < 0$, si trova infine $X(x) = A\,\cos(x\sqrt{-\lambda}) + B\,\mathrm{sen}(x\sqrt{-\lambda})$. $X(0) = A = 0$ e $X(l) = B\,\mathrm{sen}(l\sqrt{-\lambda}) = 0$; quest'ultima equazione ha soluzione con $B \neq 0$, se $l\sqrt{-\lambda} = k\pi$, $k \in \mathbf{N}^+$ (prendendo tutti i valori interi relativi di k, nulla si aggiunge alla generalità della soluzione). Dunque troviamo soluzioni non identicamente nulle in corrispondenza ai valori $\lambda = -\dfrac{k^2\pi^2}{l^2}$, che si dicono gli *autovalori* del problema al contorno considerato per l'equazione differenziale ordinaria. Ogni funzione del tipo

$$X_k(x) = B_k\,\mathrm{sen}(\frac{k\pi}{l}x) \quad k = 1, 2, \ldots$$

è soluzione dell'equazione $X_k''(x)+\dfrac{k^2\pi^2}{l^2}X_k(x)=0$, con $X_k(0)=X_k(l)=0$. Poiché il valore di λ è ora determinato, dobbiamo trovare una funzione di t che soddisfi

$$T_k'(t)=-\frac{k^2\pi^2}{l^2}T_k(t) \quad .$$

Si trova immediatamente $T_k'(t)=C_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}$. In definitiva

$$u_k(x,t)=X_k(x)\cdot T_k(t)=c_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)\, e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \quad .$$

Ovviamente una somma di un numero finito di tali soluzioni è ancora soluzione dell'equazione differenziale, non più a variabili separate, che soddisfa le condizioni d'annullamento al contorno. Cerchiamo di capire sotto quali condizioni la somma della serie corrispondente rappresenti una soluzione dell'equazione data, che soddisfa le condizioni al contorno; cercheremo inoltre d'imporre che pure la condizione iniziale sia soddisfatta da questa serie. Se supponiamo che i coefficienti c_k siano limitati (cioè che sia $|c_k|\le M\ ,\ \forall k=1,2,\ldots$), la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)\, e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \quad ,$$

è uniformemente convergente per $0\le x\le l$ e $t\ge t_0>0$, in base al criterio di Weierstrass della convergenza totale, poiché vale $|c_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)\, e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}|\le Me^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t_0}$, e la serie numerica avente come termine generale $Me^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t_0}$ è convergente. Le derivate a termine a termine rispetto a x due volte e rispetto a t sono serie esse pure uniformemente convergenti nello stesso dominio di valori e sono uguali fra loro. Dunque, vista l'arbitrarietà di $t_0>0$, la somma della serie

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x)\, e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \quad , \tag{2.64}$$

fornisce una soluzione continua insieme con le sue derivate rispetto a x e a t in $0<x<l$ e $t>0$. Inoltre la funzione $u(x,t)$ è continua anche sulla frontiera e vale 0 in $x=0$ e in $x=l$. Resta da stabilire il comportamente della serie per t che tende a 0. Se si pone $t=0$ in (2.64), e si impone che $u(x,0)=g(x)$, si trova

$$u(x,0)=g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l}x) \quad . \tag{2.65}$$

Dunque, se la funzione $g(x)$ è sviluppabile in una serie di Fourier uniformemente convergente, la convergenza della serie (2.64) ad una funzione continua può essere assicurata per $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq l$. La funzione così ottenuta soddisfa l'equazione del calore nei punti interni al dominio e soddisfa le condizioni al contorno e iniziali richieste. La condizione di sviluppabilità in una serie di Fourier uniformemente convergente è sicuramente verificata se $g(x)$ è continua con derivata prima a tratti continua, come si è richiesto nell'enunciato del teorema. Si noti che in questo caso i coefficienti dello sviluppo sono dati da

$$c_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{l} x)\, dx \quad .$$

In questo caso, i coefficienti c_k sono limitati, poiché $g(x)$ continua su $[0, l]$ lo è. $\Box$

Usando, per esempio, la trasformata di Laplace, si può dimostrare che l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad x \in \mathbf{R}\,, t > 0 \quad , \tag{2.66}$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = g(x) \quad , \tag{2.67}$$

ha la soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi \quad . \tag{2.68}$$

Ce ne occuperemo in un'altra parte del corso.

2.10 Un esempio d'equazione ellittica: l'equazione di Laplace

Considereremo un tipico problema per la seguente semplice equazione ellittica in due variabili indipendenti a coefficienti costanti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^2 \quad , \tag{2.69}$$

dove Ω è un aperto semplicemente connesso limitato, avente frontiera $\partial\Omega$ che è una curva di Jordan (cioè è continua, a variazione limitata, semplice, chiusa) con la condizione al contorno

$$u(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \quad . \tag{2.70}$$

Qui $f(x, y)$ è una funzione continua. Il problema che ci siamo posti si dice un *problema di Dirichlet interno.* Consiste dunque nel determinare una funzione armonica nell'aperto Ω, noto che sia il suo valore f sulla frontiera $\partial\Omega$, con f funzione continua. Nel caso specifico, di dimensione 2, possiamo prendere un aperto con frontiera di tipo molto generale (cioè facendo una richiesta di regolarità molto blanda per la frontiera stessa). In dimensione superiore, supporremo che valga $\Delta u = 0$ in Ω e $u = f$ su $\partial\Omega$, essendo f continua e $\partial\Omega$ ipersuperficie a tratti liscia. Con ciò si intende che $\partial\Omega$ è composta da un numero finito di parti, ognuna congruente al grafico di una funzione $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$, con g continua e con derivate prime continue. Se g ha anche derivate seconde continue, si dice che $\partial\Omega$ ha curvatura continua a tratti. Si noti infine che per stabilire l'esistenza della soluzione, sono in generale necessarie ulteriori condizioni di regolarità sul dato al contorno f (per esempio che f abbia derivate continue fino all'ordine tre in $\Omega \cup \partial\Omega$), condizioni che, in un momento successivo, si possono rimuovere. L'operatore

$$\Delta u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \quad , \tag{2.71}$$

si dice laplaciano o operatore di Laplace. Accanto al problema di Dirichlet interno, c'è quello detto *esterno.* Consiste nel trovare $u(x_1, \ldots, x_n)$ tale che $\Delta u = 0$ in $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ con la condizione $u = f$ su $\partial\Omega$. Anche qui si suppone che Ω sia un aperto semplicemente connesso e limitato. Per cominciare, supporremo che $u(x, y)$ abbia solo due variabili indipendenti. Come per l'equazione del calore, possiamo stabilire il seguente

Teorema 2.10.1 (Principio di massimo (minimo)). *Se $u(x, y)$ è una funzione continua su $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, che nei punti di Ω soddisfa l'equazione di Laplace (2.69) e al contorno soddisfa (2.70), allora assume il suo valore massimo su $\partial\Omega$. Lo stesso vale per il minimo.*

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema solo per il massimo. La dimostrazione per il minimo segue considerando il massimo di $-u$, come già si è notato per l'equazione del calore. Sia dunque M il massimo di $u(x, y)$ su $\overline{\Omega}$ e m quello su $\partial\Omega$; per assurdo si supponga $M > m$. Dunque il massimo di $u(x, y)$ sarà raggiunto in un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Consideriamo la seguente funzione ausiliaria

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{M - m}{2d^2} \cdot \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right) \quad , \tag{2.72}$$

dove d è il diametro di $\overline{\Omega}$. Vale $v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = M$. Inoltre su $\partial\Omega$ si ha

$$v(x,y) \leq m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M \quad . \tag{2.73}$$

Dunque anche $v(x,y)$ assume il suo valore massimo in un punto interno $(x_1, y_1) \in \Omega$. In quel punto sarà $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0$, trattandosi di punto di massimo. D'altra parte, calcolando direttamente, in (x_1, y_1) vale

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{M-m}{d^2} = 2 \cdot \frac{M-m}{d^2} > 0 \quad . \tag{2.74}$$

Abbiamo ottenuto una contraddizione. A questa contraddizione siamo giunti supponendo $M > m$. Deve perciò essere $M = m$ e dunque il valore massimo di $u(x,y)$ si raggiunge sulla frontiera. Lo stesso vale per il minimo. □

Osservazione 2.10.1 *Nulla cambia nella dimostrazione se si considera il caso di una funzione di n variabili indipendenti.*

Corollario 2.10.1 *Se u_1 e u_2 sono soluzioni dello stesso problema di Dirichlet interno, allora $u_1 = u_2$.*

Dimostrazione. Infatti, in questo caso, $u(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1, \ldots, x_n) - u_2(x_1, \ldots, x_n)$ è una soluzione di $\Delta u = 0$ con $u = 0$ su $\partial\Omega$. Per il principio di massimo (e di minimo) si ottiene perciò

$$0 \leq u_1(x_1, \ldots, x_n) - u_2(x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega} \quad , \tag{2.75}$$

e quindi $u_1(x_1, \ldots, x_n) = u_2(x_1, \ldots, x_n)$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega}$. □
Dunque una soluzione al problema interno di Dirichlet, se esiste, è unica.
Inoltre essa dipende in modo continuo dai dati al contorno.

Corollario 2.10.2 *Siano $f(x_1, \ldots, x_n)$ e $f^\star(x_1, \ldots, x_n)$ due funzioni continue su $\partial\Omega$, tali che $|f(x_1, \ldots, x_n) - f^\star(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$. Se u e $u^\star$ sono le soluzioni del problema interno di Dirichlet con le condizioni al contorno f e $f^\star$, rispettivamente, allora*

$$|u(x_1, \ldots, x_n) - u^\star(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon \quad \forall \, (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega} \quad . \tag{2.76}$$

Dimostrazione. La funzione $w = u - u^\star$ soddisfa l'equazione di Laplace e inoltre $w|_{\partial\Omega} = f - f^\star$. Dunque $-\varepsilon < w|_{\partial\Omega} < \varepsilon$. Per il principio di massimo (minimo) si trova finalmente

$$|u(x_1, \ldots, x_n) - u^\star(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon \quad \forall \, (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega} \,. \quad \square$$

Costruiremo ora una soluzione del problema interno di Dirichlet in dimensione 2, quando Ω sia un cerchio di centro l'origine e raggio 1 e $\partial\Omega$ sia la relativa circonferenza.

Teorema 2.10.2 *Sia* $\Omega = \{(x,y)\colon x^2+y^2<1\}$ *e sia* $f(\vartheta)$ *una funzione continua con derivate prime continue, per* $0 \le \vartheta \le 2\pi$, *con* $f(0)=f(2\pi)$. *Allora il problema di Dirichlet*

$$\begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \quad \forall\,(x,y)\in\Omega \\ u(x,y) & = & f(x,y)\forall\,(x,y)\in\partial\Omega \quad , \end{array} \tag{2.77}$$

ha una soluzione, continua in $\overline{\Omega}$.

Dimostrazione. Lungo la frontiera del cerchio unitario è $x^2+y^2=1$ e quindi la posizione del punto è individuata dalla coordinata angolare $\vartheta\in[0,2\pi]$. Converrà esprimere l'operatore laplaciano usando le coordinate polari: $x=\rho\cos(\vartheta)$, $y=\rho\,\mathrm{sen}(\vartheta)$. Si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\cdot\cos(\vartheta) - \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\mathrm{sen}(\vartheta)}{\rho} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\cdot\mathrm{sen}(\vartheta) + \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\cos(\vartheta)}{\rho} \end{aligned}$$

e ulteriormente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\cdot\cos^2(\vartheta) + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\mathrm{sen}(\vartheta)\,\cos(\vartheta)}{\rho^2} - 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta\,\partial\rho}\cdot\frac{\mathrm{sen}(\vartheta)\,\cos(\vartheta)}{\rho} \\ +\frac{\mathrm{sen}^2(\vartheta)}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\mathrm{sen}^2(\vartheta)}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\cdot\mathrm{sen}^2(\vartheta) - 2\cdot\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\mathrm{sen}(\vartheta)\,\cos(\vartheta)}{\rho^2} + 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta\,\partial\rho}\cdot\frac{\mathrm{sen}(\vartheta)\,\cos(\vartheta)}{\rho} \\ +\frac{\cos^2(\vartheta)}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cos^2(\vartheta)}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2} \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}\,. \tag{2.78}$$

Cerchiamo dunque una funzione $u(\rho,\vartheta)$ che sia soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0\,, \tag{2.79}$$

con la condizione al contorno

$$u(1, \vartheta) = f(\vartheta) \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi\,. \tag{2.80}$$

Si noti che, affinché la funzione $f(x, y)$ sia continua sul bordo, è necessario che sia $f(0) = f(2\pi)$. Cerchiamo se ci sono soluzioni a variabili separate. $u(\rho, \vartheta) = R(\rho) \cdot T(\vartheta)$. Dovranno soddisfare l'equazione

$$R''(\rho) \cdot T(\vartheta) + \frac{1}{\rho} \cdot R'(\rho) \cdot T(\vartheta) + \frac{1}{\rho^2} \cdot R(\rho) \cdot T''(\vartheta) = 0\,, \tag{2.81}$$

e quindi, se esistono soluzioni non identicamente nulle, dividendo per $R(\rho) \cdot T(\vartheta)$

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{T''(\vartheta)}{T(\vartheta)} = 0\,, \tag{2.82}$$

cioè

$$\rho^2 \cdot \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \cdot \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{T''(\vartheta)}{T(\vartheta)}\,. \tag{2.83}$$

Il primo membro di (2.83) è funzione solo di ρ, il secondo solo di ϑ. Affinché essi siano uguali debbono assumere un valore costante, λ. Ci riduciamo perciò alla soluzione delle seguenti due equazioni

$$T''(\vartheta) + \lambda \cdot T(\vartheta) = 0\,, \quad T(0) = T(2\pi)\,, \tag{2.84}$$

e

$$\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho) - \lambda \cdot R(\rho) = 0\,. \tag{2.85}$$

Ragionando sulla (2.84) come già si è fatto in precedenza nella dimostrazione del Teorema (2.9.2), si trova una soluzione non identicamente nulla se $\lambda = n^2$, $n \in \mathbf{N}$ e $T_n(\vartheta) = a_n \cos(n\vartheta) + b_n \operatorname{sen}(n\vartheta)$. Con questa scelta di λ la (2.85) diviene

$$\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho) - n^2 \cdot R(\rho) = 0\,, \tag{2.86}$$

che ha soluzioni del tipo ρ^α. Si trova che i possibili valori di α sono $\pm n$, e, poiché vogliamo che la soluzione sia definita anche per $\rho = 0$, resta solo il valore $\alpha = n$. Dunque le soluzioni a variabili separate sono del tipo $u_n(\rho, \vartheta) = \rho^n(a_n \cos(n\vartheta) + b_n \operatorname{sen}(n\vartheta))$. Ripetendo le considerazioni già fatte, cercheremo la soluzione in forma di una serie

$$u(\rho, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n(a_n \cos(n\vartheta) + b_n \operatorname{sen}(n\vartheta)) . \tag{2.87}$$

Se supponiamo, come faremo, che i coefficienti a_n e b_n siano limitati da una costante positiva M, allora la serie converge in ogni punto interno al cerchio, poiché per $\rho \le \rho_1 < 1$ la serie dei moduli è maggiorata dalla serie numerica convergente

$$2M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^n .$$

Si vede inoltre facilmente che sono uniformemente convergenti le serie derivate a termine a termine rispetto a ρ due volte e rispetto a ϑ due volte. Per l'arbitrarietà di $\rho_1 < 1$ la funzione $u(\rho, \vartheta)$ così ottenuta come somma della serie, è armonica in $\rho < 1$. Ponendo $\rho = 1$ si ottiene

$$u(1, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\vartheta) + b_n \operatorname{sen}(n\vartheta)) . \tag{2.88}$$

Nelle ipotesi fatte per $f(\vartheta)$, posto

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi \, , a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi)\, d\varphi \, ,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \operatorname{sen}(n\varphi)\, d\varphi \, , \tag{2.89}$$

la serie di Fourier risulta essere maggiorata dalla serie numerica convergente

$$u(1, \vartheta) = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \, ,$$

e dunque la (2.87) converge uniformemente per $\rho \leq 1$ e $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Vediamo come si possa ulteriormente trasformare l'espressione di $u(\rho, \vartheta)$.

$$\begin{aligned}
u(\rho,\vartheta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(a_n \cos(n\vartheta) + b_n \operatorname{sen}(n\vartheta)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \{\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi)\cos(n\vartheta) f(\varphi)\, d\varphi \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(n\varphi)\operatorname{sen}(n\vartheta)\, d\varphi\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\varphi - \vartheta)\}\, d\varphi\,.
\end{aligned}$$

Si è potuto integrare a termine a termine per la convergenza uniforme della serie per $\rho \leq 1$.
Osserviamo che $\rho^n \cos(n\alpha) = \Re(\rho^n e^{in\alpha}) = \Re(z^n)$, se $z = \rho e^{i\alpha}$. Perciò, se $\rho < 1$

$$\begin{aligned}
&1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos(n\alpha) = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos(n\alpha) = -1 + 2\Re\big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\big) \\
&-1 + 2\Re\frac{1}{1-z} = -1 + 2\frac{1 - \rho\cos(\alpha)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\alpha)} = \frac{1-\rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\alpha)}\,.
\end{aligned}$$

Allora, per $\rho < 1$ si trova

$$u(\rho,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\vartheta-\varphi)}\, d\varphi\,. \tag{2.90}$$

La formula integrale così ottenuta si dice la *formula integrale di Poisson.* Essa fornisce la soluzione dell'equazione di Laplace per $\rho < 1$. Si può verificare che il limite al quale tende l'integrale è proprio $f(\vartheta)$ se $(\rho, \varphi) \to (1, \vartheta)$ da punti interni al cerchio unitario. Più in generale, per un cerchio di raggio r vale la formula

$$u(\rho,\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\varphi)\frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\vartheta-\varphi)}\, d\varphi\,. \tag{2.91}$$

La rappresentazione integrale della soluzione permette di riconoscere che le condizioni da imporre alla funzione al contorno $f(\vartheta)$, possono essere attenuate. Infatti l'integrale può essere derivato sotto il segno e può essere calcolato il limite per $(\rho, \varphi) \to (1, \vartheta)$, che è ancora $f(\vartheta)$, nella sola ipotesi di continuità di f.

In $\mathbf{R}^3$ si può stabilire la seguente formula di Poisson che fornisce la soluzione del problema di Dirichlet $\Delta u = 0$ in $\Omega = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, con la condizione al contorno $u(r, \vartheta, \varphi) = f(\vartheta, \varphi)$, con f continua.

$$u(\rho, \vartheta, \varphi) = \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(t, s) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\gamma} \operatorname{sen} t \, dt \, ds \ , \tag{2.92}$$

dove γ è l'angolo compreso tra i vettori aventi origine in $(0, 0, 0)$ e vertici $(\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta, \rho \cos\varphi)$, con $0 \le \varphi \le \pi$ e $0 \le \vartheta \le 2\pi$, e $(r \operatorname{sen} s \cos t, r \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t, r \cos s)$, con $0 \le s \le \pi$ e $0 \le t \le 2\pi$.
Dalla formula di Poisson si deduce immediatamente il seguente

Teorema 2.10.3 (Teorema della media.) *Una funzione armonica in un cerchio C e continua sulla sua chiusura $\overline{C}$, assume nel centro di C un valore che è la media integrale dei valori sulla circonferenza di C.*

Dimostrazione. Basta porre $\rho = 0$ nella formula (2.91) (o rispettivamente (2.92)), per ottenere

$$u(0, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \, d\varphi \ , \tag{2.93}$$

o, rispettivamente

$$u(0, \vartheta, \varphi) = \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(r \operatorname{sen} s \cos t, r \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t, r \cos s) \ \operatorname{sen} t \, dt \, ds \ .\square$$

Nel caso di funzioni di due variabili indipendenti, si può la teoria delle funzioni olomorfe e, in particolare, il Teorema di Riemann, per trasportare l'esistenza di una funzione armonica all'interno di un cerchio di raggio unitario e centro nell'origine con assegnato valore continuo al bordo, nell'esistenza di una funzione armonica all'interno di una curva di Jordan, con assegnato valore continuo sulla curva stessa.

Oltre al problema interno di Dirichlet di cui ci siamo occupati, si possono considerare per l'equazione di Laplace il problema esterno di Dirichlet, e i problemi interno ed esterno di Neumann.
Dato un aperto semplicemente connesso e limitato $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, il problema esterno di Dirichlet consiste nel trovare una soluzione dell'equazione

$$\Delta u = 0 \ \forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega \quad , \tag{2.94}$$

tale che

$$u(x) = f(x) \ \forall x \in \partial\Omega \quad , \tag{2.95}$$

essendo f un'assegnata funzione continua.
I problemi interno ed esterno di Neumann si enunciano come segue: "Dato un aperto semplicemente connesso e limitato $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, trovare una funzione armonica in Ω (in $\mathbf{R}^n \backslash \Omega$), tale che la sua derivata fatta rispetto alla normale esterna (per esempio) sia un'assegnata funzione continua sul bordo; cioè $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ in $\partial\Omega$ ".
Nel problema di Neumann, la derivata normale non può essere assegnata in modo arbitrario, e la soluzione del problema è determinata a meno di una costante. Lo verificheremo nel caso bidimensionale

Teorema 2.10.4 *Sia $u(x, y)$ una soluzione del problema di Neumann (interno)*

$$\Delta u = 0 \ \forall (x, y) \in \Omega \quad , \tag{2.96}$$

con la condizione al contorno

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \ \forall (x, y) \in \partial\Omega \quad . \tag{2.97}$$

Allora si ha

$$\int_{+\partial\Omega} g(s)\, ds = 0 \quad . \tag{2.98}$$

Dimostrazione. Infatti si ha

$$0 = \int\!\!\int_{\Omega} (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\, dxdy = \int_{+\partial\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx) = \int_{+\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n_e}\, ds \quad .\square$$

Teorema 2.10.5 *Se u_1 e u_2 sono due soluzioni del problema di Neumann (2.96), (2.97), esse differiscono per una costante.*

Dimostrazione. Posto $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$, abbiamo

$$\int\!\!\int_{\Omega} (u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\, dxdy = \int_{+\partial\Omega} u\, \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \int\!\!\int_{\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x})^2\, dxdy \quad .$$

Un'espressione analoga vale per $u \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ e quindi

$$0 = \int\!\!\int_{\Omega} u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\, dxdy = \int_{+\partial\Omega} u\, \frac{\partial u}{\partial n_e}\, ds - \int\!\!\int_{\Omega} ((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2)\, dxdy \quad .$$

Poiché $\dfrac{\partial u}{\partial n_e} = 0$, resta

$$\int\!\!\int_\Omega \big((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2\big)\, dxdy = 0 \quad ,$$

e quindi $(\dfrac{\partial u}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial u}{\partial x})^2 = 0$. Dunque $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y) =$ costante. $\square$

Una funzione $u(x,y)$ si dice *coniugata* di una funzione $v(x,y)$ se sono soddisfatte le condizioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Teorema 2.10.6 *Il problema di Neumann (2.96), (2.97), si riduce a un problema di Dirichlet per una funzione coniugata.*

Dimostrazione. Si voglia trovare una funzione $u(x,y)$ tale che

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\, \forall (x,y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_e} &= g\, \forall (x,y) \in \partial\Omega \,. \end{aligned}$$

Poniamo $f(s) = \int_{s_0}^{s} g(t)\, dt$. Sia $v(x,y)$ tale che

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0\, \forall (x,y) \in \Omega \\ v &= f\, \forall (x,y) \in \partial\Omega \,. \end{aligned}$$

Se $u(x,y)$ è una funzione coniugata di $v(x,y)$ allora è pure $\Delta u = 0$, in Ω e su $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial n_e} = u_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds} = v_y \frac{dy}{ds} + v_x \frac{dx}{ds} = \frac{dv}{ds} = \frac{df}{ds} = g(s) \quad . \quad \square$$

Infine notiamo che il problema di Cauchy è mal posto per le equazioni ellittiche. Sia data l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ ,$$

con le condizioni iniziali in $x = 0$, $u(0, y) = 0$, $u_x(0, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(ny)}{n^k}$, con n, k interi > 0. Si trova facilmente la soluzione

$$u(x, y) = \frac{1}{n^k}\operatorname{sen}(ny)\operatorname{senh}(nx) \quad .$$

Ora $|u_x(0, y)| \leq 1/n^k$, e quindi si può prendere piccola a piacere, pur di prendere n opportunamente grande. La soluzione invece, anche se x è piccolo quanto si vuole, purché non nullo, può assumere valori grandi a piacere, se n è sufficientemente grande. Dunque un'oscillazione comunque piccola nei dati iniziali viene amplificata senza limite nella soluzione.

2.11 Un esempio d'equazione iperbolica: l'equazione delle onde

La modellizzazione di molti fenomeni di tipo diverso (propagazione di onde elastiche nei solidi, di onde sonore nei fluidi, di onde elettromagnetiche) conduce alla considerazione di un'equazione di tipo iperbolico, detta equazione delle onde, accompagnata da opportune condizioni iniziali e al contorno. In particolare noi considereremo il seguente problema detto "della corda vibrante", che, sotto opportune condizioni di linearizzazione, permette di descrivere il moto di una corda tesa tra due punti fissi e soggetta a opportune condizioni iniziali di forma e di "pizzicamento". Consideremo dunque il seguente problema: trovare la funzione $u(x, t)$ tale che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t)\,, \quad 0 < x < l\,, t > 0\,, \tag{2.99}$$

accompagnata dalle condizioni iniziali

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \quad 0 \leq x \leq l\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \quad 0 \leq x \leq l\,, \end{aligned} \tag{2.100}$$

e dalle condizioni al contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \quad t \geq 0\,, \\ u(l, t) &= 0 \quad t \geq 0\,, \end{aligned} \tag{2.101}$$

In generale, supporremo che $F(x, t)$ sia funzione continua delle sue variabili; supporremo che $f(x)$ sia funzione di classe $\mathcal{C}^2$ e $g(x)$ sia funzione di classe

$\mathcal{C}^1$. Cominceremo a trattare il caso dell'equazione (2.99) omogenea, cioè con $F(x,t)$ identicamente nulla. Dunque cerchiamo una funzione che sia soluzione di

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < l\,, t > 0\,, \tag{2.102}$$

accompagnata dalle condizioni iniziali e al contorno (2.100) e (2.101).
È noto che, operando il cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} \xi &= x + c\,t \\ \eta &= x - c\,t\,, \end{aligned}$$

si trova

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,. \end{aligned}$$

Perciò la (2.102) diviene

$$-4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0\,, \quad \xi > 0\,, \eta < l\,. \tag{2.103}$$

Dunque l'equazione è soddisfatta da

$$u(\xi,\eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta) \quad \xi > 0\,, \eta < l\,,$$

con ϕ e ψ funzioni di classe $\mathcal{C}^2$. Tornando alle variabili originali, si trova

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \quad 0 < x < l\,, t > 0\,. \tag{2.104}$$

$\phi(x+ct)$ è un'onda che viaggia nella direzione dell'asse x negativo (con velocità $-c$) senza cambiare forma, mentre $\psi(x-ct)$ è un'onda che viaggia con velocità c nella direzione positiva dell'asse x.
Imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali si trova

$$\begin{aligned} \phi(x) + \psi(x) &= f(x) \quad 0 \le x \le l \\ c \cdot \phi'(x) - c \cdot \psi'(x) &= g(x) \quad 0 \le x \le l\,. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Derivando la prima equazione e moltiplicandola per c, si trova agevolmente

$$\begin{aligned} 2c \cdot \phi'(x) &= c \cdot f'(x) + g(x) \quad 0 \le x \le l \\ 2c \cdot \psi'(x) &= c \cdot f'(x) - g(x) \quad 0 \le x \le l\,. \end{aligned}$$

Di qui, integrando su $[0,\xi]$ e su $[0,\eta]$ rispettivamente si ottiene infine

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2c}\int_0^{\xi} g(s)\,ds + K_1, \quad 0 \le \xi \le l\,, \tag{2.106}$$

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2}f(\eta) - \frac{1}{2c}\int_0^{\eta} g(s)\,ds + K_2, \quad 0 \le \eta \le l\,. \tag{2.107}$$

Ricordando la prima delle condizioni (2.105), si vede che deve essere $K_1 + K_2 = 0$, e quindi si ottiene

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds \tag{2.108}$$

Questa è la formula stabilita da D'Alembert nel 1747, formula che per ora ha validità solo per $0 \le x+ct \le l$, $0 \le x-ct \le l$. Dunque questa formula risolve il problema per la regione triangolare del piano x, t, delimitata da $t \ge 0$, $t \le \dfrac{x}{c}$, $t \le \dfrac{l-x}{c}$, regione nella quale le condizioni al contorno ancora non entrano in gioco e contano solo le condizioni iniziali. Naturalmente (2.108) è una soluzione "classica" di (2.102) solo se $f \in \mathcal{C}^2(0,l)$ e $g \in \mathcal{C}^1(0,l)$. Cerchiamo ora d'imporre le condizioni al contorno in $x = 0$ e $x = l$. Si trova

$$\phi(c\,t) + \psi(-c\,t) = 0\,, \quad t \ge 0 \tag{2.109}$$

$$\phi(l + c\,t) + \psi(l - c\,t) = 0\,, \quad t \ge 0 \tag{2.110}$$

Se nella (2.109) poniamo $\zeta = -c\,t$, si trova

$$\psi(\zeta) = -\phi(-\zeta)\,, \quad -l \le \zeta \le 0\,, \tag{2.111}$$

che permette di definire i valori di $\psi(\zeta)$ sull'intervallo $-l \le \zeta \le l$. Infatti inizialmente ψ è nota per valori del suo argomento nell'intervallo $[0,l]$. La (2.111) permette di estendere la sua definizione anche a $[-l,0]$. Posto poi $\zeta = l + c\,t$ nella (2.110), si trova

$$\phi(\zeta) = -\psi(2l - \zeta)\,, \quad l \le \zeta \le 3l\,. \tag{2.112}$$

Infatti quando $l \le \zeta \le 3l$, si ha $-l \le 2l - \zeta \le l$. ϕ era definita inizialmente su $[0,l]$; ora viene estesa all'intervallo $[0,3l]$. Riapplicando la (2.111) si ottiene dunque l'estensione di ψ sull'intervallo $[-3l,l]$, e poi, riapplicando la (2.112), si ottiene l'estensione di ϕ all'intervallo $[0,5l]$, e così via...
Riapplicando successivamente le condizioni al contorno, ϕ risulterà definita per ogni $\xi \ge 0$ e ψ per ogni $\eta \le l$. Dunque otterremo in questo modo la

soluzione del problema $u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$ per ogni $0 \le x \le l$ e ogni $t \ge 0$. C'è un altro modo, forse più conveniente, di tenere conto delle condizioni al contorno. Se scriviamo esplicitamente la (2.111) otteniamo

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2}f(-\zeta) - \frac{1}{2\,c}\int_0^{-\zeta} g(s)\,ds - K\,, \quad -l \le \zeta \le 0\,. \tag{2.113}$$

Se estendiamo la definizione di $f(x)$ all'intervallo $-l \le x \le 0$, ponendo $f(x) = -f(-x)$, per $-l \le x \le 0$ e lo stesso facciamo per $g(x)$, allora si vede che la (2.113) si riduce alla (2.107). Dunque estendendo per disparità intorno allo 0 sia la $f(x)$ che la $g(x)$, si vede che la formula inizialmente valida solo per il valore dell'argomento in $[0,l]$ ora vale nell'intervallo più ampio in $[-l,l]$. Estendendo poi per disparità sia f che g intorno a l, definendo $f(x) = -f(2l-x)$ e $g(x) = -g(2l-x)$ per $l \le x \le 2l$ e poi intorno a $-l$, $3l$, e così via, si trovano due funzioni che sono periodiche di periodo $2l$, definite su tutta la retta reale. Avendo operato quest'estensione di f e g, la formula di D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds \tag{2.114}$$

risulta essere valida per ogni $0 \le x \le l$ e per ogni $t \ge 0$.
Naturalmente, affinché la soluzione sia di classe $\mathcal{C}^2$, dovremo fare ipotesi sui valori di f e g e delle loro derivate nei punti estremi del campo. Precisamente, per assicurare la continuità di f e di g dovremo supporre che sia $f(0) = f(l) = g(0) = g(l) = 0$; che esistano finiti $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ e $f'_-(l), g'_+(0), g'_-(l)$; che esistano e siano nulle $f''_+(0)$ e $f''_-(l)$. Imposte le condizioni in 0 e in l, automaticamente saranno verificate in tutti i punti del tipo $k \cdot l$, con $k \in \mathbf{Z}$. In questo modo si trovano $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Se f e g non forniscono una soluzione classica, non appartenendo alla classe funzionale opportuna, tuttavia la soluzione (2.114) potrà essere interpretata come soluzione "generalizzata", anche nel senso delle distribuzioni, come si vedrà in altra parte del corso.
Supponiamo che sia $0 < \overline{x} < l$ e $\overline{t} < \frac{\overline{x}}{c}$, $\overline{t} < \frac{l-\overline{x}}{c}$. Allora la soluzione dipende solo dai dati iniziali del segmento $\overline{x} - c\overline{t} \le x \le \overline{x} + c\overline{t}$. Cambiando i valori di f e g al di fuori di questo segmento il valore $u(\overline{x},\overline{t})$ non cambia. Il segmento ritagliato sull'asse x dalle rette di pendenza $1/c$ e $-1/c$, passanti per $(\overline{x},\overline{t})$, cioè il segmento $[\overline{x} - c\overline{t}, \overline{x} + c\overline{t}]$, si dice il *dominio di dipendenza* del punto $(\overline{x},\overline{t})$. Le rette $x - c\,t =$ costante e $x + c\,t =$ costante sono le *linee caratteristiche* dell'equazione delle onde.
Le informazioni contenute nella funzione f si trasmettono con velocità c e $-c$ lungo le linee caratteristiche uscenti da un punto $\overline{x}$ dell'asse x; quelle

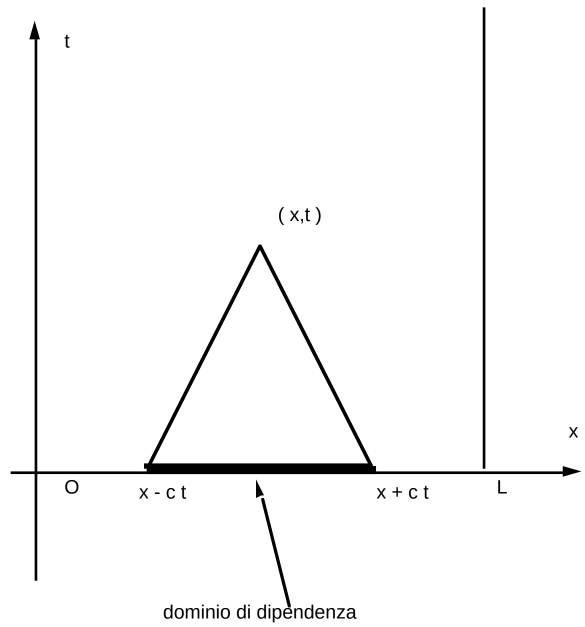

Figura 2.1: Dominio di dipendenza.

relative alla funzione g si trasmettono con velocità $|v| \leq c$. Da un punto $\overline{x}$ dell'asse x escono le due linee caratteristiche $x - c\,t = \overline{x}$ e $x + c\,t = \overline{x}$. Il cono da esse individuato si dice il *campo d'influenza* del punto $\overline{x}$. Se $\overline{x}$ e $\overline{t}$ non soddisfano le restrizioni sopra ricordate, si potrà individuare il dominio di dipendenza di $(\overline{x}, \overline{t})$, o pensando f e g estese a tutta la retta reale secondo il procedimento sopra illustrato, o seguendo le riflessioni delle caratteristiche lungo le linee $x = 0$ e $x = l$.

Per chiarire il significato della formula di D'Alembert, è opportuno considerare il caso particolare in cui $f(x)$ è non nulla solo in un intorno del punto x' e $g(x)$ è nulla, come è mostrato nella Figura 2.3. Allora l'onda iniziale si suddivide in due onde di ampiezza metà che si propagano una lungo la direzione positiva dell'asse x con velocità c e l'altra lungo la direzione negativa dell'asse x e quindi con velocità $-c$. La situazione a un tempo $t > 0$, tempo nel quale i due segnali si sono sufficientemente allontanati fra loro e non hanno ancora raggiunto gli estremi della corda, è mostrata nella Figura 2.4. Il segnale è non nullo, solo in un intorno dei punti x tali che $x \pm c\,t \approx x'$, cioè in un intorno dei punti $x_1 \approx x' + c\,t$ e $x_2 \approx x' - c\,t$. Successivamente i due segnali vengono riflessi agli estremi della corda, invertono il senso di marcia e interferiscono fra loro.

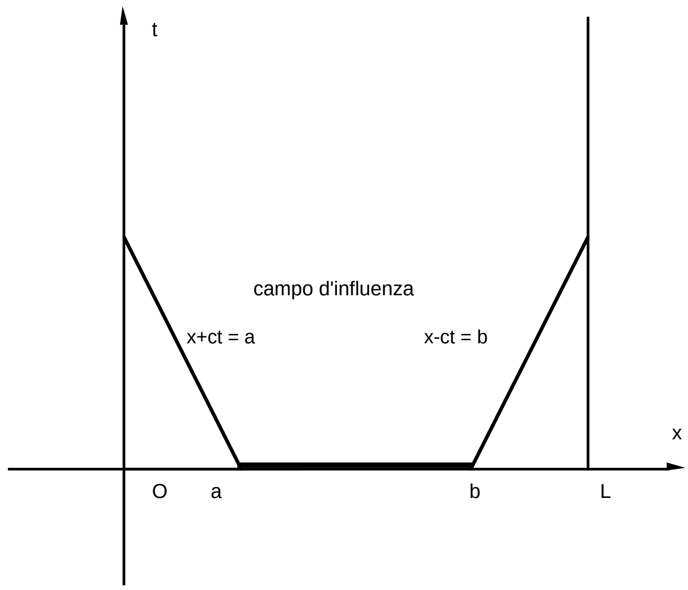

Figura 2.2: Campo d'influenza dell'intervallo $[a, b]$.

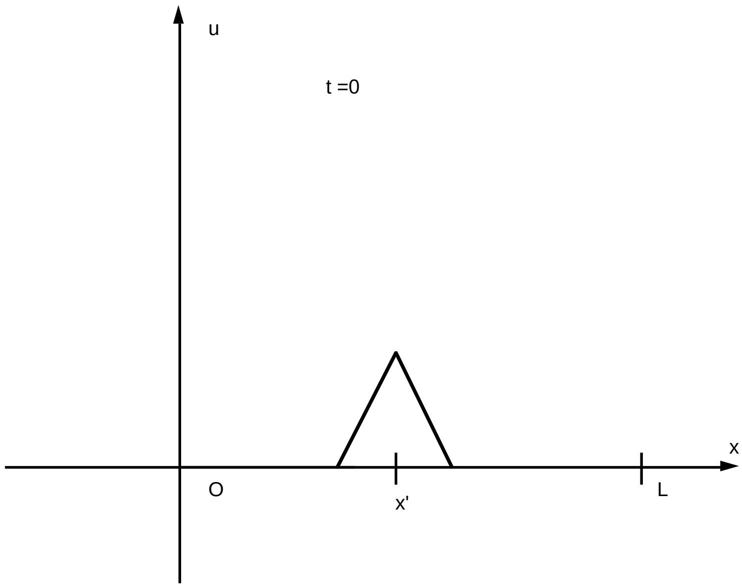

Figura 2.3: Corda: forma iniziale.

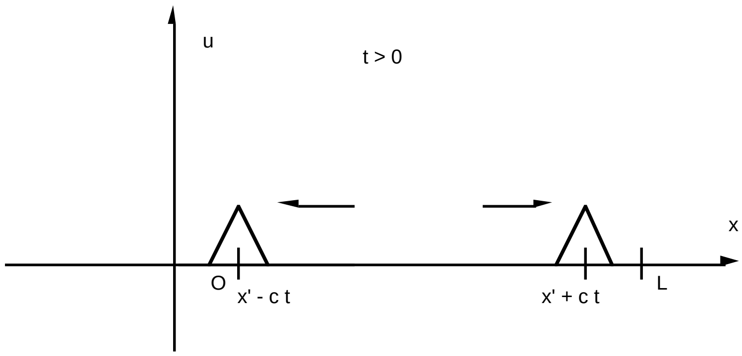

Figura 2.4: Corda: forma al tempo t.

2.11.1 L'equazione completa

Si voglia ora risolvere l'equazione completa, con l'associato problema ai valori iniziali, ma senza tenere conto delle condizioni al contorno. Cioè si consideri il caso di una corda di lunghezza infinita.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)\,, \quad x \in \mathbf{R}\,, t > 0\,, \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \quad x \in \mathbf{R}\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \quad x \in \mathbf{R}\,. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Con il cambiamento di variabili più volte ricordato

$$\begin{aligned} \xi &= x + c\,t \\ \eta &= x - c\,t\,, \end{aligned}$$

l'equazione differenziale diviene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2\,c}) = -\frac{1}{4\,c^2}\, F(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2\,c})\,. \tag{2.117}$$

Integrando rispetto alla prima variabile tra gli estremi d'integrazione η e ξ, si trova

$$\int_\eta^\xi \frac{\partial^2 u}{\partial s\, \partial \eta}(\frac{s+\eta}{2}, \frac{s-\eta}{2\,c})\, ds = -\frac{1}{4\,c^2} \int_\eta^\xi F(\frac{s+\eta}{2}, \frac{s-\eta}{2\,c})\, ds,$$

cioè

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(\frac{s+\eta}{2}, \frac{s-\eta}{2\,c})\Big|_{s=\eta}^{s=\xi} = -\frac{1}{4\,c^2} \int_\eta^\xi F(\frac{s+\eta}{2}, \frac{s-\eta}{2\,c})\, ds,$$

ossia

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2\,c}) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(\eta, 0) - \frac{1}{4\,c^2} \int_\eta^\xi F(\frac{s+\eta}{2}, \frac{s-\eta}{2})\, ds.$$

Ma

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(\eta, 0) = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(\eta, 0) - \frac{1}{2\,c} \frac{\partial u}{\partial t}(\eta, 0)$$

Integrando ancora una volta rispetto alla seconda variabile (η), si trova

$$\int_\eta^\xi \frac{\partial u}{\partial z}(\frac{\xi+z}{2}, \frac{\xi-z}{2\,c})\, dz = \int_\eta^\xi \big(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(z,0) - \frac{1}{2\,c}\frac{\partial u}{\partial t}(z,0)\big)\, dz$$
$$-\frac{1}{4\,c^2}\int_\eta^\xi \big(\int_z^\xi F(\frac{s+z}{2}, \frac{s-z}{2\,c})\, ds\big)\, dz.$$

Tenendo conto che

$$\int_\eta^\xi \frac{\partial u}{\partial x}(z,0) = u(\xi,0) - u(\eta,0)\,,$$

che $s = \overline{x} + c\,\overline{t}$, $z = \overline{x} - c\,\overline{t}$ che il dominio d'integrazione è dato da $\eta \le \overline{x} - c\,\overline{t} \le \overline{x} + c\,\overline{t} \le \xi$, cioè $\eta + c\,\overline{t} \le \overline{x} \le \xi - c\,\overline{t}$ e $0 \le \overline{t} \le \frac{1}{2\,c}(\xi - \eta)$ e che $\det\big|J\begin{pmatrix} s & z \\ \overline{x} & \overline{t}\end{pmatrix}\big| = 2\,c$, si trova

$$\frac{1}{4\,c^2}\int_\eta^\xi \big(\int_z^\xi F(\frac{s+z}{2}, \frac{s-z}{2\,c})\, ds\big)\, dz = \frac{1}{2\,c}\int_0^{\frac{\xi-\eta}{2\,c}} d\overline{t}\big(\int_{\eta+c\,\overline{t}}^{\xi-c\,\overline{t}} F(\overline{x},\overline{t})\, d\overline{x}\big)\,,$$

e, quindi

$$u(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2\,c}) = \frac{1}{2}\big[u(\xi,0) + u(\eta,0)\big] + \frac{1}{2\,c}\int_\eta^\xi \frac{\partial u}{\partial t}(\overline{x},0)\, d\overline{x}$$
$$+\frac{1}{2\,c}\int_0^{\frac{\xi-\eta}{2\,c}} d\overline{t}\big(\int_{\eta+c\,\overline{t}}^{\xi-c\,\overline{t}} F(\overline{x},\overline{t})\, d\overline{x}\big)\,.$$

Finalmente, tenendo conto dei valori iniziali, si trova

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[f(x+c\,t) + f(x-c\,t)\big] + \frac{1}{2\,c}\int_{x-c\,t}^{x+c\,t} g(\overline{x})\, d\overline{x}$$
$$+\frac{1}{2\,c}\int_0^t d\overline{t}\big(\int_{x-c\,(t-\overline{t})}^{x+c\,(t-\overline{t})} F(\overline{x},\overline{t})\, d\overline{x}\big)\,. \qquad (2.118)$$

2.11.2 Unicità della soluzione

Consideriamo il seguente problema completo per la corda vibrante, con assegnati movimenti negli estremi 0 e l:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)\,, \quad 0 < x < l\,, t > 0\,, \qquad (2.119)$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \quad 0 \le x \le l\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \quad 0 \le x \le l\,. \end{aligned} \tag{2.120}$$

e con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} u(0,t) &= f_1(t) \quad t \ge 0\,, \\ u(l,t) &= f_2(t) \quad t \ge 0\,. \end{aligned} \tag{2.121}$$

Se $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ sono soluzioni del precedente problema, allora $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ è soluzione dell'equazione (2.119) con le condizioni (2.120) e (2.121) omogenee, cioè con $F = f = g = f_1 = f_2 = 0$. Ora se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < l\,, t > 0\,,$$

moltiplicando per $\frac{\partial u}{\partial t}$, si trova

$$\frac{\partial}{\partial t}\big[\frac{1}{2}\big\{(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + c^2\,(\frac{\partial u}{\partial x})^2\big\}\big] - \frac{\partial}{\partial x}\big[c^2\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial t}\big] = 0\,.$$

Integrando tra 0 e T in t e tra 0 e l in x, si ottiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^l \big\{(\frac{\partial u}{\partial t})^2(x,T) + c^2\,(\frac{\partial u}{\partial x})^2(x,T)\big\}\,dx = \\ &\frac{1}{2}\int_0^l \big\{(\frac{\partial u}{\partial t})^2(x,0) + c^2\,(\frac{\partial u}{\partial x})^2(x,0)\big\}\,dx = 0\,, \end{aligned}$$

poiché $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ e $u(x,0) = 0$ e quindi $\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0$. Perciò, per ogni $T > 0$ si trova

$$\frac{1}{2}\int_0^l \big\{(\frac{\partial u}{\partial t})^2(x,T) + c^2\,(\frac{\partial u}{\partial x})^2(x,T)\big\}\,dx = 0\,,$$

il che implica, se $u \in \mathcal{C}^2$, che $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$ per ogni $0 < x < l$ e per ogni $t > 0$. Ma allora $u(x,t) =$ costante nello stesso dominio. Poiché supponiamo che $u(x,t)$ sia continua sulla chiusura del precdente dominio, essa è costante anche per $0 \le x \le l$ e $t \ge 0$. Allora assume il valore che ha sulla frontiera di questo dominio, in particolare per $t = 0$ e $0 \le x \le l$;

dunque, essendo $u(x,0) = 0$, è $u(x,t) = 0$ per $0 \leq x \leq l$ e $t \geq 0$. Dunque $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ per $0 \leq x \leq l$ e $t \geq 0$. Il metodo qui utilizzato per dimostrare l'unicità della soluzione è detto *dell'energia.* Infatti la quantità $\frac{1}{2}\big\{(\frac{\partial u}{\partial t})^2(x,t)+c^2\,(\frac{\partial u}{\partial x})^2(x,t)\big\}$ è associata all'energia trasportata dall'onda.

Bibliografia

La lista che segue è quella dei libri consultati per preparare queste note. In essi è trattata la teoria classica delle equazioni differenziali a derivate parziali; nella maggior parte dei volumi citati e in queste note non si fa riferimento (se non in modo assolutamente occasionale e senza alcun dettaglio) alle soluzioni generalizzate e ai metodi variazionali. Si è posto un accento particolare sul metodo delle caratteristiche. Segnalo in proposito il libro ricordato al punto 8 della bibliografia, che ne dà una trattazione molto aggiornata e moderna.

1. L. Amerio, *Elementi di analisi superiore*, Tamburini, Milano (1960).
2. R. Courant e D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Voll. I e II, Interscience, New York (1962).
3. R. Courant e K. O. Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, Interscience Publ., New York (1948).
4. B. Friedman, *Principle and technics of applied mathematics*, John Wiley & Sons, New York (1965).
5. I. G. Petrovsky, *Lectures on partial differential equations*, Interscience Publ., New York (1964).
6. V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, Vol. II, Éditions MIR, Moscou (1970)
7. A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*, Academic Press Publ., New York (1949).
8. Tran Duc Van, Mikio Tsuji, Nguyen Duy Thai Son, *The characteristic method and its generalizations for first-order nonlinear partial differential equations*, Chapman& Hall/CRC, Boca Raton (2000).
9. F. Tricomi, *Equazioni a derivate parziali*, Cremonese, Roma (1964).
10. H. F. Weinberger, *A first course in partial differential equations*, John Wiley & Sons, New York (1965).