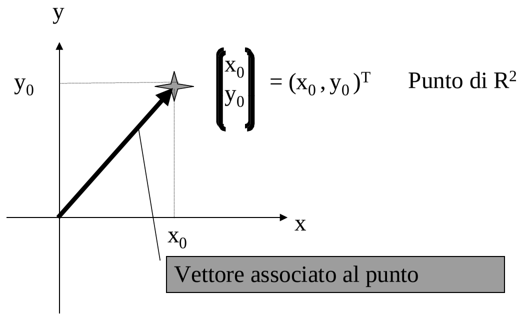
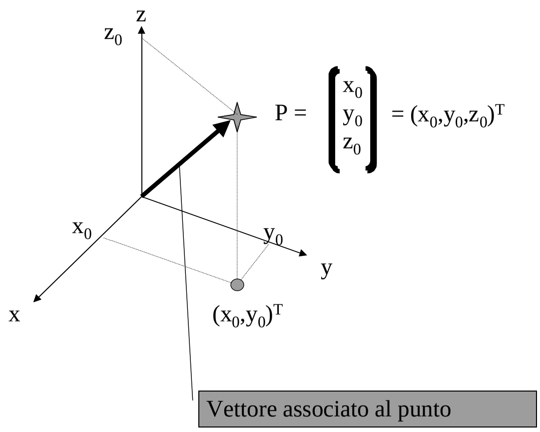
Laurea in ingegneria logistica e della produzione.
Laurea in ingegneria dei materiali-materie plastiche.
Corso di Analisi Matematica II.

Dr. Franco Obersnel



$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (x_0, y_0)^T \qquad \text{Punto di } R^2$$



$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = (x_0,y_0,z_0)^T$$

$$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in R \right\}$$

Identificheremo sempre punti con vettori.

Due vettori si possono sommare: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

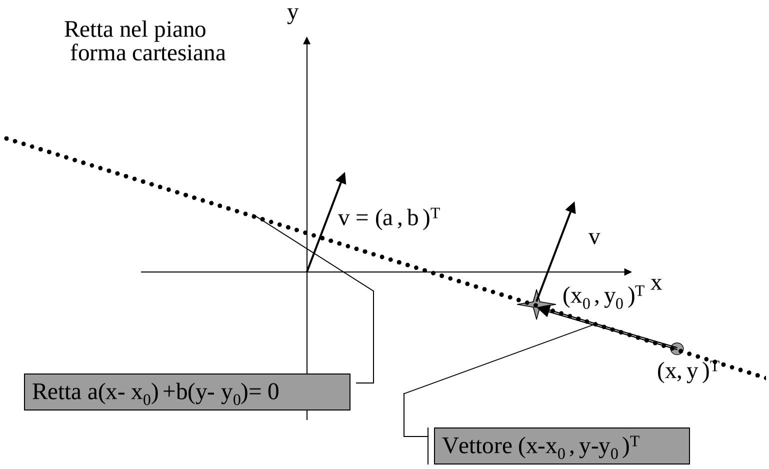
Un vettore puo’ essere moltiplicato per uno scalare:

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \dots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

I vettori $e_1 = (1,0,\dots,0)^T$, $e_2 = (0,1,\dots,0)^T$,...,$e_n = (0,0,\dots,1)^T$

costituiscono la base canonica dello spazio vettoriale R^n

Retta nel piano
forma cartesiana



La retta in forma cartesiana rappresenta il luogo dei "vettori puntati" nel punto $(x_0 , y_0)^T$ che sono ortogonali al vettore fissato v.

La generica retta del piano e' rappresentata da un'equazione della forma:

$a(x- x_0) +b(y- y_0)= 0$
$ax - ax_0 +by- by_0= 0$
$ax+by+(- ax_0 - by_0)= 0$

$ax+by+c = 0$ $\{$ posto $c = (- ax_0 - by_0) \}$

La retta e' il luogo degli zeri della funzione $F : R^2 \to R$ definita da $F(x,y)=ax+by+c$

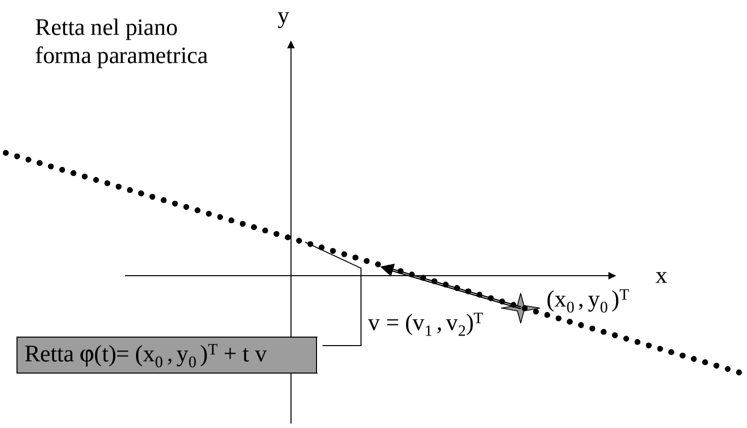
Una retta non parallela all'asse delle ordinate si puo' anche vedere come il grafico nel piano R^2 di una funzione $f:R\to R$ del tipo

$f(x)= mx+q$

Il legame con l'equazione cartesiana e' dato da

$ax+by+c=0$
$m=-a/b \quad q=-c/b$

Retta nel piano
forma parametrica



La retta in forma parametrica rappresenta il luogo dei "vettori puntati" nel punto $(x_0 , y_0)^T$ che sono paralleli al vettore fissato $v = (v_1 , v_2)^T$.

La generica retta del piano e' rappresentata da un'equazione del tipo:

$(x_0 , y_0)^T + t\,(v_1 , v_2)^T$

Che rappresenta l'insieme

$\{ (x_0 + t\,v_1, y_0 + t\,v_2)^T \in R^2$ con $t \in R \}$

In definitiva vi sono almeno tre modi per rappresentare una retta nel piano:

Come insieme degli zeri di una funzione $F : R^2 \to R$:
$\{ (x,y)^T \in R^2 : F(x,y)=0 \}$

Come grafico di una funzione $f:R \to R$:
$\{ (x,f(x))^T \in R^2 : x \in R \}$

Come immagine di una funzione $\varphi:R \to R^2$:
$\{\varphi (t) \in R^2 : t \in R \}$

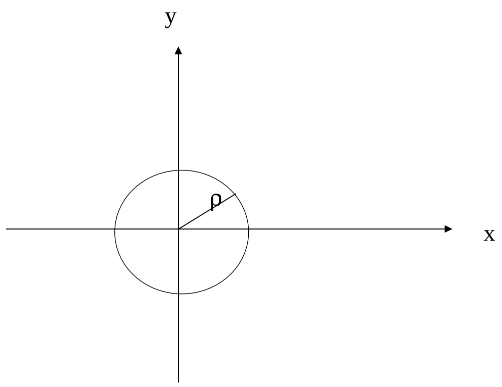
Lo stesso discorso si puo’ ripetere per altri oggetti geometrici; ad esempio per le curve del piano: una curva del piano si puo’ rappresentare:

Come insieme degli zeri di una funzione $F : A \subseteq R^2 \to R$:
$\{ (x,y)^T \in A : F(x,y)=0 \}$

Come grafico di una funzione $f: A \subseteq R \to R$:
$\{ (x,f(x))^T \in R^2 : x \in A \}$

Come immagine di una funzione $\varphi: A \subseteq R \to R^2$:
$\{ \varphi(t) \in R^2 : t \in A \}$

Esempio: per il cerchio $F(x,y)=x^2+y^2-1$
(non e’ un grafico, il semicerchio e’ $f(x)= \sqrt{(1-x^2)}$)
$\varphi(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)^T$



ρ = costante $x^2 + y^2$ = costante^2

Il piano in forma cartesiana rappresenta il luogo dei “vettori puntati” nel punto $(x_0 , y_0 , z_0)^T$ che sono ortogonali al vettore fissato v.

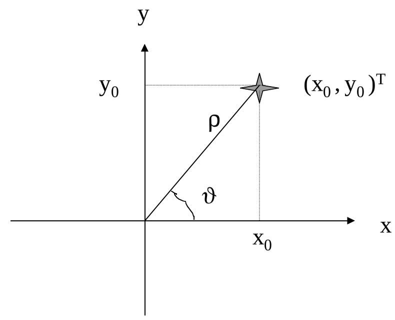
Il generico piano dello spazio e’ rappresentato da un’equazione della forma:

$$a(x- x_0) +b(y- y_0) + c (z- z_0) = 0$$
$$ax - ax_0 +by- by_0 + cz- cz_0 = 0$$
$$ax+by+ cz + (- ax_0 - by_0 - cz_0)= 0$$

$$ax+by+cz+d = 0 \qquad \{ \text{posto } d = (- ax_0 - by_0 - cz_0) \}$$

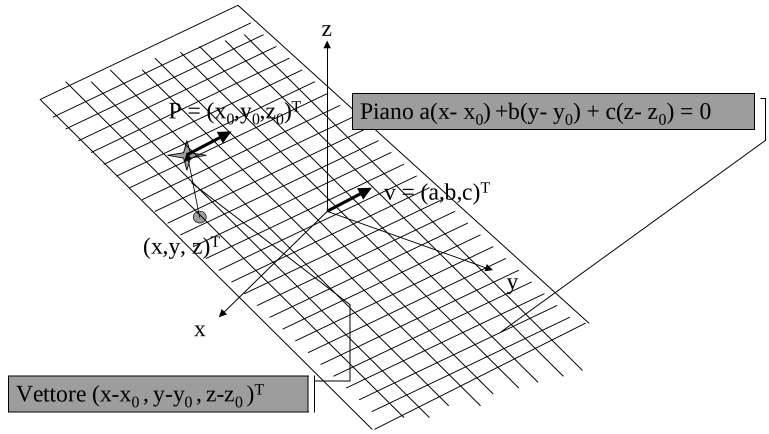
Il piano e’ il luogo degli zeri della funzione $F : R^3 \to R$ definita da $F(x,y,z)=ax+by+cz+d$

Coordinate polari



$x_0 = \rho \cos \vartheta$
$y_0 = \rho \operatorname{sen} \vartheta$

Piano nello spazio



Un piano non parallelo al piano xy si puo’ anche vedere come il grafico nello spazio R^3 di una funzione $f:R^2 \to R$ del tipo

$f(x,y)= px+qy+r$

Il legame con l’equazione cartesiana e’ dato da

$ax+by+cz+d=0$
$p=-a/c \quad q=-b/c \quad r=-d/c$

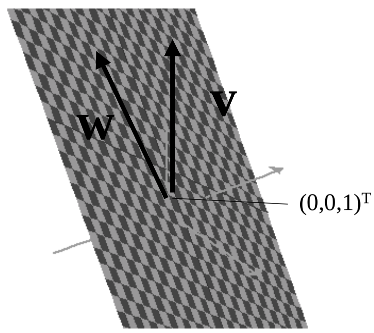
Un piano in forma parametrica rappresenta il luogo dei "vettori puntati" nel punto $(x_0, y_0, z_0)^T$ che sono combinazione lineare di due vettori fissati $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ e $w = (w_1, w_2, w_3)^T$.

Il generico piano dello spazio e' rappresentato da un'equazione del tipo:

$(x_0, y_0, z_0)^T + s\,(v_1, v_2, v_3)^T + t\,(w_1, w_2, w_3)^T$

che rappresenta l'insieme

$\{ (x_0 + s\,v_1 + t w_1, y_0 + s\,v_2 + t\,w_2,\ z_0 + s\,v_3 + t\,w_3)^T \in R^3 : (s,t)^T \in R^2 \}$



Il piano di equazione 2x+y+z-1=0
O anche $\varphi\,(s,t) = (0,0,1)^T + s\,v + t\,w$

In definitiva vi sono almeno tre modi per rappresentare un piano nello spazio:

Come insieme degli zeri di una funzione $F : R^3 \to R$:
$\{ (x,y,z)^T \in R^3 : F(x,y,z)=0 \}$

Come grafico di una funzione $f : R^2 \to R$:
$\{ (x,y,f(x,y))^T \in R^3 : (x,y)^T \in R^2 \}$

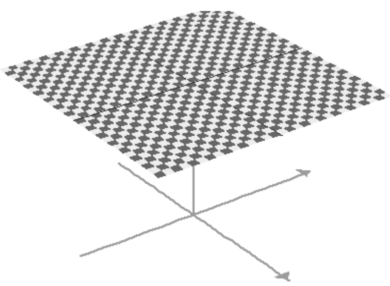
Come immagine di una funzione $\sigma : R^2 \to R^3$:
$\{\sigma\,(s,t) \in R^3 : (s,t)^T \in R^2 \}$

Lo stesso discorso si puo' ripetere per altri oggetti geometrici; ad esempio per le superficie dello spazio: una superficie si puo' rappresentare:

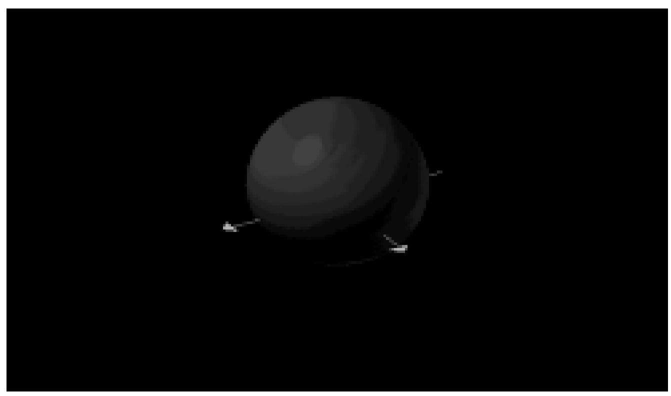
Come insieme degli zeri di una funzione $F : A \subseteq R^3 \to R$:
$\{ (x,y,z)^T \in A : F(x,y,z)=0 \}$

Come grafico di una funzione $f : A \subseteq R^2 \to R$:
$\{ (x,y,f(x,y))^T \in R^3 : (x,y)^T \in A \}$

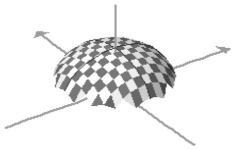
Come immagine di una funzione $\sigma : A \subseteq R^2 \to R^3$:
$\{\sigma\,(s,t) \in R^3 : (s,t)^T \in A \}$



Il piano di equazione z=3

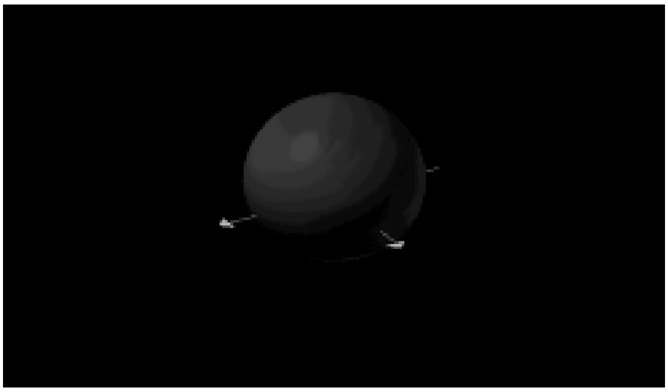


La sfera unitaria centrata nell'origine $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



La semisfera superiore x^2+y^2+z^2=1

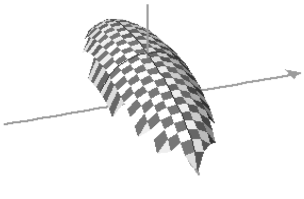
Grafico di f(x,y)= (1- x^2-y^2)^(1/2)



Equazione parametrica

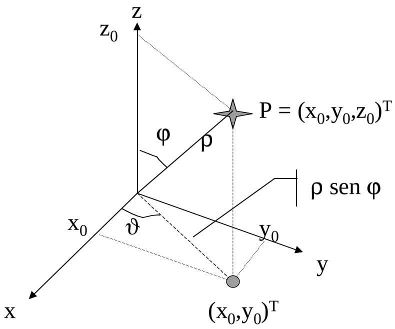
$\sigma(\varphi, \vartheta) = (x(\varphi, \vartheta), y(\varphi, \vartheta), z(\varphi, \vartheta))^T$

$x(\varphi, \vartheta) = \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta$
$y(\varphi, \vartheta) = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta$
$z(\varphi, \vartheta) = \cos\varphi$

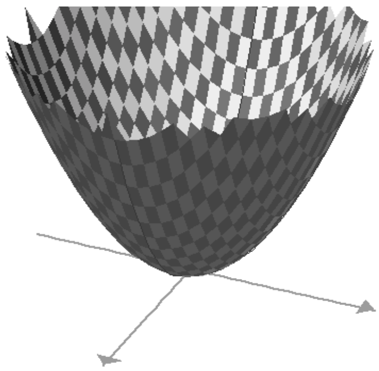


L'ellissoide 2x^2+y^2/4+z^2=1 (calotta superiore)

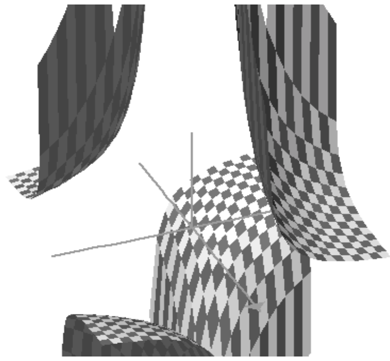
Coordinate sferiche



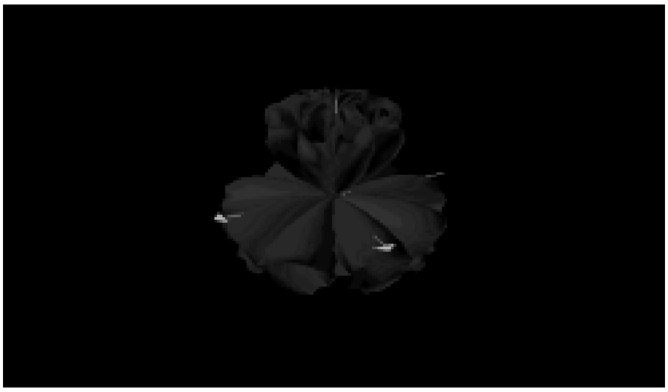
$x_0 = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta$
$y_0 = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta$
$z_0 = \rho \cos\varphi$



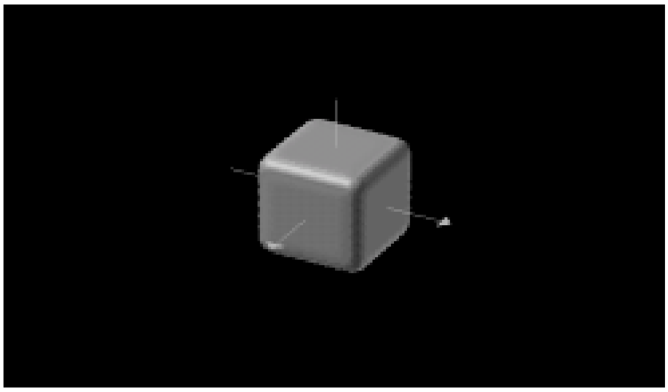
Il paraboloide x^2+y^2-z=0



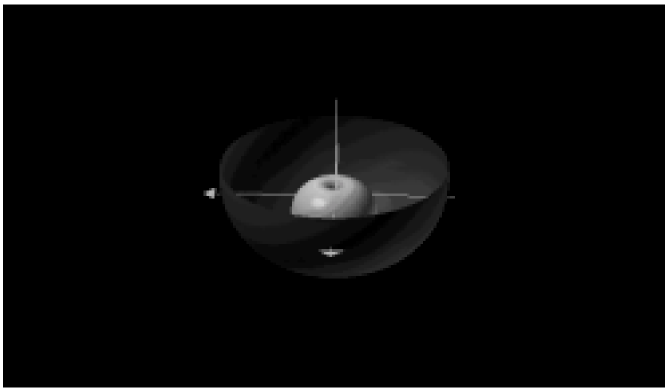
L'iperboloide di equazione xyz=1



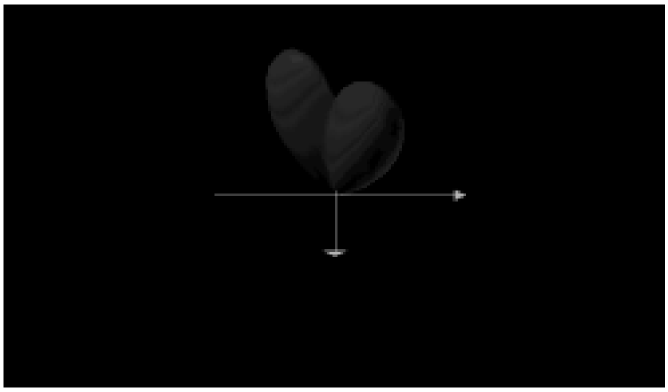
$(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = 2 \sin(4 s + \cos 4 t)$



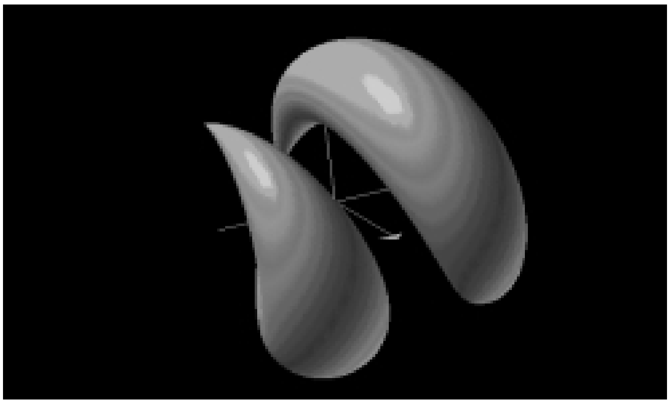
$x^{10} + y^{10} + z^{10} = 1$



$\varphi = 0.8\ \pi r$



$r = |2 \sin 2\varphi \cdot \sin 2\vartheta + 2 \cos \varphi|$



$x(s,t) = (2+\mathrm{sen}(2\pi t)\,\mathrm{sen}(2\pi s))\,\mathrm{sen}(3\pi t)$
$y(s,t) = \mathrm{sen}(2\pi t)\cos(2\pi s)+4t-2$
$z(s,t) = ((2+\mathrm{sen}(2\pi t)\,\mathrm{sen}(2\pi s))\cos(3\pi t)$

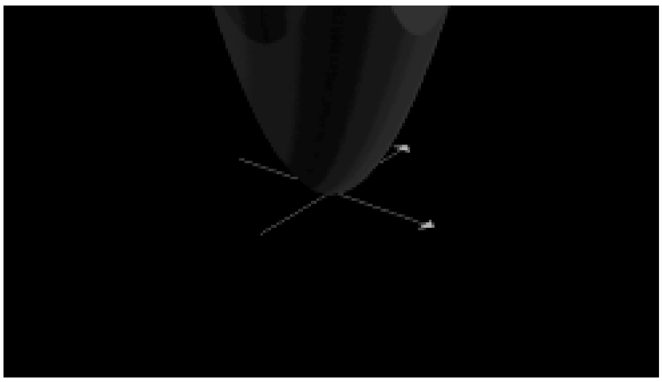
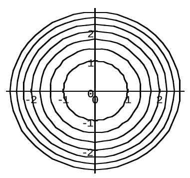


Grafico di f(x)=x^2+y^2



Linee di livello del paraboloide, equispaziate da 1 a 7

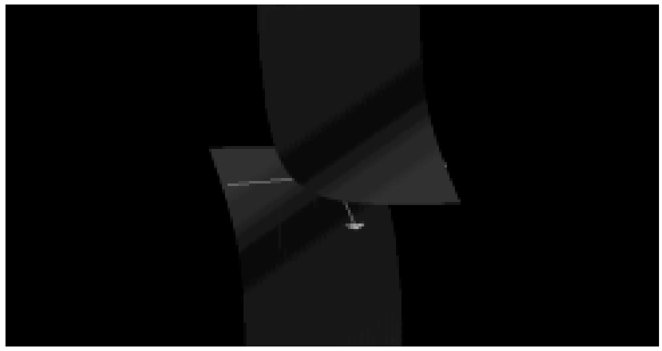
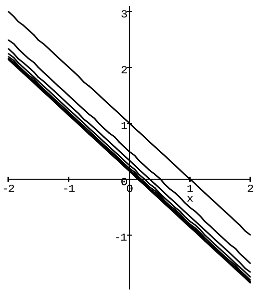
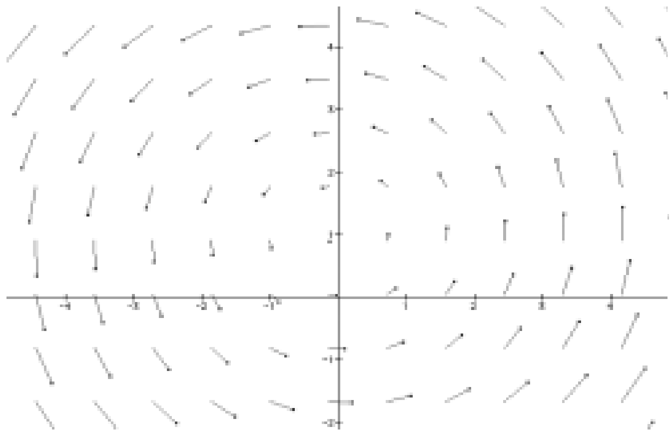


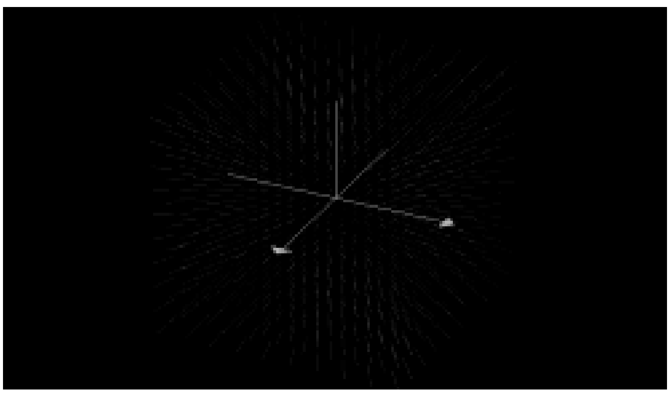
Grafico della funzione f(x,y)= 1/(x+y)



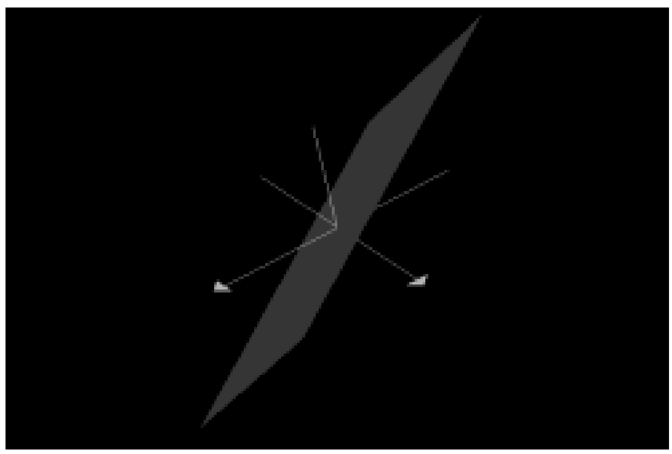
Linee di livello di f(x,y)= 1/(x+y) equispaziate da 1 a 7



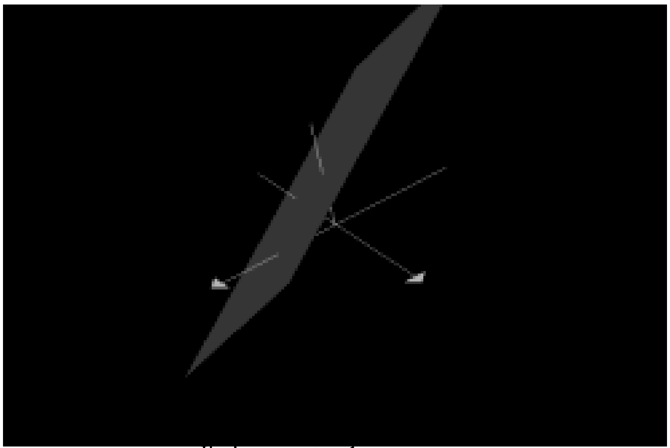
Rappresentazione del campo vettoriale f(x,y) = (1-y, x)



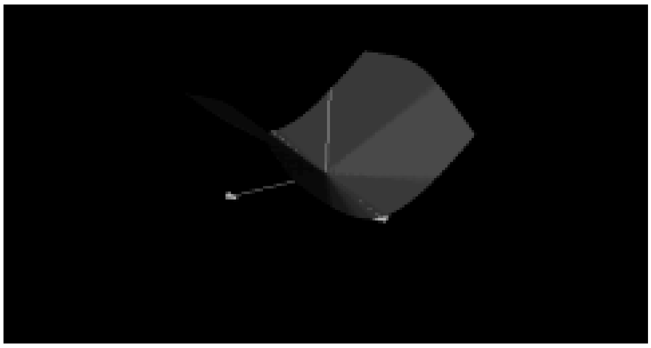
Rappresentazione del campo vettoriale f(x,y,z) = (x,y,z)



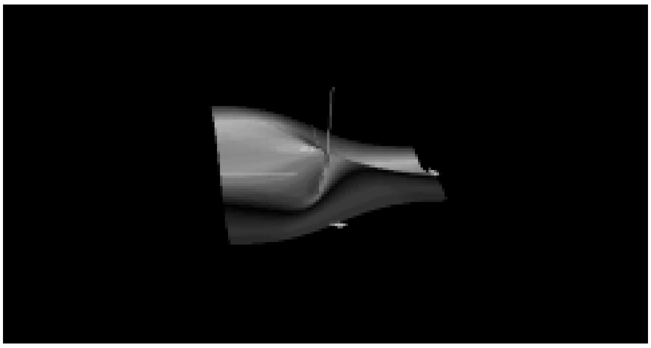
Il piano x-y+z=0



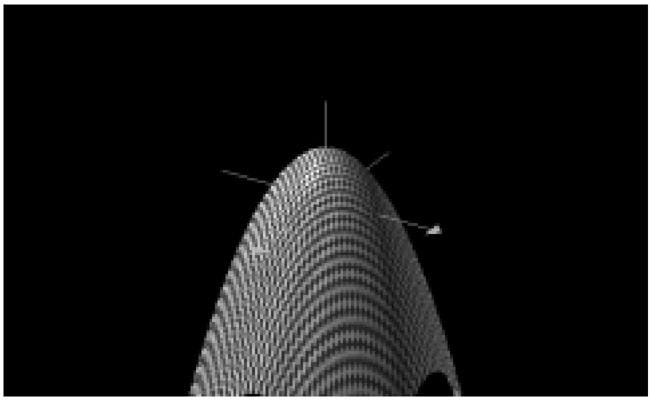
Il piano x-y+z=1



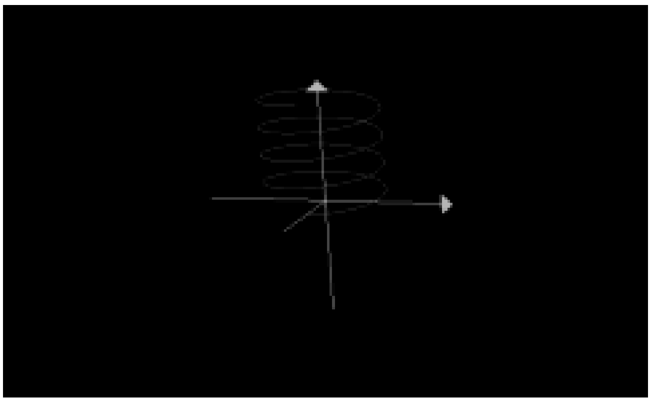
$f(x,y) = x^2/(x^2+y^2)^{1/2}$



$f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$



X^2+y^2+z=k



Esempio di elica circolare