

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: trasformate di Fourier

Prof. Franco Obersnel

($\chi_E : A \rightarrow \mathbb{C}$ è la funzione caratteristica dell'insieme E : $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$, $\chi_E(x) = 0$ se $x \in A \setminus E$; p_{2a} è la funzione porta di lunghezza $2a$: $p_{2a} = \chi_{[-a,a]}$; $\text{sgn}(x)$ è la funzione segno: $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$, $\text{sgn}(0) = 0$)

Esercizio 1 Si calcolino le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

$$(i) \frac{\cos x}{1+x^2} \quad (ii) \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad (iii) e^{-|x|} \cdot \text{sgn}(x)$$

$$(iv) \max\{1 - |x|, 0\}. \quad (v) \frac{1}{9(x-1)^2 + 1} \quad (vi) e^{ax} \cdot \chi_{[0,+\infty[}(-x) \text{ dove } a \in \mathbb{R}^+$$

Soluzioni: (i) $\frac{\pi}{2} (e^{-|\omega-1|} + e^{-|\omega+1|})$; (ii) $-\frac{\pi i \omega}{2} e^{-|\omega|}$; (iii) $-\frac{2i\omega}{1+\omega^2}$;
 (iv) $\text{sinc}^2(\frac{\omega}{2\pi})$; (v) $\frac{\pi}{3} e^{-i\omega - \frac{1}{3}|\omega|}$; (vi) $\frac{1}{a-i\omega}$.

Esercizio 2 Si calcolino le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

$$(i) 4ix^2 e^{-x^2} - 2ie^{-x^2} \quad (ii) \frac{x \cos x - \text{sen } x}{x^2} \quad (iii) \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) \cdot (\frac{1}{2} - |x|)$$

Soluzioni: (i) $-i\sqrt{\pi}\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}}$; (ii) $i\omega\pi p_2(\omega)$; (iii) $\frac{1}{4}\text{sinc}^2(\frac{\omega}{4\pi})$.

Esercizio 3 Si calcoli il prodotto di convoluzione $f * g$, dove $f(x) = e^{-|x|}$ e $g(x) = p_2(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$.

Soluzione: $e^{-|x|} (e - e^{-1})$ se $|x| \geq 1$; $2(1 - e^{-1} \cosh(x))$ se $|x| < 1$.

Esercizio 4 Si calcolino, usando la trasformata di Fourier, gli integrali

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4+x^2)^2} dx.$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} x \text{sen}(x) e^{-x^2} dx.$$

Soluzioni: (i) $\frac{\pi}{16}$; (ii) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}}$.

Esercizio 5 Si usi la trasformata di Fourier per trovare una soluzione delle equazioni differenziali

$$(i) -u'' + 4u = e^{-|x|}; \quad (ii) -u'' + u = p_2(x);$$

$$(iii) -u'' + 9u = e^{-x} \cdot \chi_{[0,+\infty[}(x) \quad (iv) u'' + xu' + u = 0$$

Soluzioni: viene riportata una delle possibili infinite soluzioni.

$$(i) \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|-|x-y|} dy; \quad (ii) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-|x-y|} dy; \quad (iii) \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} e^{-y-3|x-y|} dy; \quad (iv) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Esercizio 6 Si usi la trasformata di Fourier per trovare una soluzione $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ dell'equazione (alle derivate parziali) del trasporto:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + c u_x(x, t) = 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x); \end{cases}$$

con $c > 0$ e $\varphi \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

Soluzione: $\varphi(x - ct)$.