# Successioni e serie di funzioni

## 1 Successioni di funzioni

Sia $I$ un intervallo, eventualmente illimitato, e sia $f_n$ una successione di funzioni a valori reali definite in $I$.

**Definizione 1.1** (*Convergenza puntuale*)**.** Diremo che la successione $f_n$ è *convergente in $I$* se per ogni $x \in I$ è convergente la successione di numeri reali $f_n(x)$. Rimane allora definita in $I$ la *funzione limite* della successione $f_n$, definita, per ogni $x \in I$, da

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \tag{1}$$

Diremo anche che $f_n$ *converge puntualmente* a $f$ e scriveremo $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. La definizione significa pertanto che per ogni $x \in I$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice $\overline{n} = \overline{n}(\epsilon, x)$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \tag{2}$$

**Definizione 1.2** (*Convergenza uniforme*)**.** Diremo che la successione $f_n$ è *uniformemente convergente* in $I$ a una funzione $f$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice $\overline{n} = \overline{n}(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in I \quad (\Leftrightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon). \tag{3}$$

È evidente che la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale, mentre non vale il viceversa, come illustra il seguente controesempio.

*Esempio* 1.3. Sia $I = [0, 1]$. Si consideri la successione di funzioni $f_n$ definite da

$$f_n(x) = 1 - x^n, x \in I.$$

Si verifica immediatamente che $f_n$ converge alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \\ 0, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Dunque,

$$f(x) - f_n(x) = \begin{cases} x^n, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \\ 0, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Si ha allora che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 \leq x < 1} x^n = \left( \sup_{0 \leq x < 1} x \right)^n = 1,$$

per cui la convergenza di $f_n$ a $f$ non è uniforme.

Ripercorrendo le dimostrazioni dei Teoremi 4.13 e 4.14 degli appunti sugli spazi metrici e normati, riguardanti la completezza rispetto alla norma infinito degli spazi delle funzioni limitate e delle funzioni limitate e continue, seguono immediatamente i teoremi 1.4 e 1.5. Per completezza ne riportiamo comunque le dimostrazioni.

**Teorema 1.4** (Criterio di Cauchy)**.** *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $f_n$ sia uniformemente convergente in $I$ è che*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \ : \ \forall n, m \geq \overline{n}, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \forall x \in I. \tag{4}$$

*Dimostrazione.* Se $f_n$ converge uniformemente a una funzione $f$, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice $\overline{n} = \overline{n}(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in I.$$

Dunque, per ogni $n, m \geq \overline{n}$, si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\epsilon, \forall x \in I. \tag{5}$$

Viceversa, se vale (4), per ogni $x \in I$, la successione $f_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e dunque convergente, essendo $\mathbb{R}$ completo. Definiamo, per ogni $x \in I$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Passando al limite per $m \to \infty$ in (4), si ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq \overline{n}, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall x \in I.$$

□

**Teorema 1.5** (Continuità del limite uniforme di funzioni continue). *Sia $f_n$ una successione di funzioni uniformemente convergente in $I$ a una funzione $f$. Se tutte le funzioni della successione sono continue in un punto $x_0 \in I$, allora $f$ è continua in $x_0$. In particolare, se le $f_n$ sono continue in $I$, la funzione limite $f$ è continua in $I$.*

*Dimostrazione.* Sappiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice $\overline{n} = \overline{n}(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in I.$$

Dato che $f_{\overline{n}}$ è continua in $x_0$,

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{\overline{n}}(x) - f_{\overline{n}}(x_0)| < \epsilon.$$

Allora, per ogni $x \in I$ tale che $|x - x_0| < \delta$, si ha

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{\overline{n}}(x)| + |f_{\overline{n}}(x) - f_{\overline{n}}(x_0)| + |f_{\overline{n}}(x_0) - f(x_0)| < 3\epsilon,$$

quindi $f$ è continua in $x_0$. □

L'esempio 1.3 dimostra che l'ipotesi di convergenza uniforme assunta nel Teorema 1.5 è necessaria per la continuità della funzione limite.

**Teorema 1.6** (Passaggio al limite sotto segno di derivata). *Sia $f_n$ una successione di funzioni convergente nell'intervallo chiuso $I = [a, b]$ ad una funzione $f$. Inoltre le funzioni $f_n$ siano tutte derivabili in $[a, b]$ e la successione $f'_n$ sia uniformemente convergente in $[a, b]$. Allora $f$ è derivabile in $[a, b]$ e*

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f'_n(x), \forall x \in [a, b]. \tag{6}$$

*Dimostrazione.* Fissato un qualunque punto $x_0 \in [a, b]$, definiamo

$$\varphi_n(h) = \begin{cases} \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h}, & \text{se } h \neq 0, \\ \\ f'_n(x_0), & \text{se } h = 0. \end{cases}$$

Le funzioni $\varphi_n$ sono definite e continue sull'intervallo $J = [a - x_0, b - x_0]$. Proviamo che la successione $\varphi_n$ è uniformemente convergente in $J$, utilizzando il Criterio di Cauchy. Per $h \neq 0$, applicando il teorema di Lagrange, si ha

$$|\varphi_m(h) - \varphi_n(h)| = \left| \frac{(f_m(x_0 + h) - f_m(x_0)) - (f_n(x_0 + h) - f_n(x_0))}{h} \right| =$$

$$\left| \frac{(f_m - f_n)(x_0 + h) - (f_m - f_n)(x_0)}{h} \right| = |(f_m - f_n)'(x_0 + \theta h)|,$$

dove $\theta = \theta(m, n, x_0)$, $\theta \in (0, 1)$. D'altra parte, per $h = 0$ si ha

$$|\varphi_m(0) - \varphi_n(0)| = |f'_m(x_0) - f'_n(x_0)|.$$

Dalla convergenza uniforme della successione $f'_n$ e dal Teorema 1.4 si ha che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n \geq \overline{n}$,

$$|f'_m(x) - f'_n(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b].$$

Pertanto per ogni $m, n \geq \overline{n}$,

$$|\varphi_m(h) - \varphi_n(h)| < \epsilon, \forall h \in J.$$

Dal Teorema 1.4 segue allora che la successione $\varphi_n$ converge uniformemente in $J$ ad una funzione continua $\varphi$. Dalla definizione di $\varphi_n$ si ha che

$$\varphi(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, & \text{se } h \neq 0, \\ \\ \lim_{n\to\infty} f'_n(x_0), & \text{se } h = 0. \end{cases}$$

Dalla continuità di $\varphi$ segue che esiste

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = \varphi(0),$$

ovvero esiste

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x_0).$$

□

**Teorema 1.7** (Passaggio al limite sotto segno di integrale)**.** *Sia $f_n$ una successione di funzioni continue, uniformemente convergente nell'intervallo chiuso $I = [a, b]$ a una funzione $f$. Allora esiste il* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ *e si ha*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \tag{7}$$

*Dimostrazione.* Per il teorema 1.5, $f$ è continua in $[a, b]$ e pertanto ivi integrabile. Per ipotesi, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ per ogni $x \in [a, b]$. Quindi per ogni $n \geq \overline{n}$ si ha

$$\left| \int_a^b f_n(x) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \epsilon(b - a).$$

□

L'enunciato del teorema precedente è spesso indicato come *passaggio al limite sotto il segno di integrale*, in quanto lo si può sintetizzare nella forma seguente

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left[ \lim_{n\to\infty} f_n \right] (x)dx. \tag{8}$$

# 2 Serie di funzioni

Sia $f_k$ una successione di funzioni a valori reali definite in un intervallo $I$, eventualmente illimitato. Consideriamo la successione di funzioni $\varphi_n$ definita da

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} f_k, \tag{9}$$

costituita dalle somme parziali della successione $f_k$. Analogamente a quanto visto per le serie numeriche, l'espressione

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \tag{10}$$

è detta *serie di funzioni* ed è definita *convergente, assolutamente convergente, divergente* in un punto $x \in I$ a seconda che tale sia la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

Se la serie (10) è convergente per ogni $x \in I$, rimane definita la funzione *somma della serie*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{n\to\infty} \varphi_n. \tag{11}$$

**Definizione 2.1.** Diremo che la serie (10) *converge uniformemente* con somma $\varphi$ se la successione (9) converge uniformemente in $I$ alla funzione $\varphi$.

Dal Teorema 1.4 segue immediatamente il criterio di Cauchy per le serie di funzioni.

**Teorema 2.2** (Criterio di Cauchy per le serie). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie di funzioni* (10) *converga uniformemente in $I$ è che*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \overline{n} \ : \ \forall n \geq \overline{n}, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \epsilon, \forall x \in I. \tag{12}$$

Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ converge uniformemente in $I$, diremo che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ è dotata di *convergenza assoluta uniforme* ed in tal caso, dal Teorema 2.2, segue che è anche uniformemente convergente.

**Definizione 2.3.** Diremo che la serie (10) *converge totalmente* in $I$ se esiste una successione di numeri reali $l_k$ tale che

i) $|f_k(x)| \leq l_k, \forall x \in I$,

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} l_k$ è convergente.

Dal Teorema 2.2 segue che una serie convergente totalmente è dotata di *convergenza assoluta uniforme.*

I seguenti teoremi sono immediata conseguenza degli analoghi risultati per le successioni di funzioni stabiliti nel precedente paragrafo.

**Teorema 2.4** (Continuità della somma uniforme di funzioni continue)**.** *La somma di una serie di funzioni continue in un punto $x_0 \in I$ (in $I$), che sia uniformemente convergente in $I$, è continua in $x_0 \in I$ (in $I$).*

**Teorema 2.5** (Derivazione per serie)**.** *Se la serie* (10) *converge nell'intervallo chiuso $I = [a, b]$ con somma $\varphi$, le funzioni $f_k$ sono tutte derivabili in $[a, b]$ e la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ converge uniformemente in $[a, b]$, allora la funzione $\varphi$ è derivabile in $[a, b]$ e*

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x), \forall x \in [a, b]. \tag{13}$$

**Teorema 2.6** (Integrazione per serie)**.** *Se la serie* (10)*, con le $f_k$ continue nell'intervallo chiuso $I = [a, b]$, converge uniformemente con somma $\varphi$, allora la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$ è convergente e si ha*

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx. \tag{14}$$

# 3 Serie di Taylor

Sia $f$ una funzione infinitamente derivabile in un intervallo $I$ e sia $x_0$ un punto interno a $I$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo allora scrivere la formula di Taylor di $f$ di punto iniziale $x_0$ e ordine $n$, con resto alla Lagrange:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \tag{15}$$

dove

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

con $\xi$ un punto interno all'intervallo di estremi $x_0$ e $x$.

Fissato $n$ e facendo tendere $x$ a $x_0$, si ha che

$$\lim_{x\to x_0} R_n(x) = 0,$$

da cui deriva che

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 \ : \ \forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| < \epsilon,$$

ovvero il polinomio di Taylor è una buona approssimazione di $f$ in un intorno di $x_0$.

È naturale chiedersi se, fissato $x \in I$, e facendo tendere di $n$ a $+\infty$, si verifichi

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x),$$

in altre parole se la serie seguente, detta *serie di Taylor di punto iniziale* $x_0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{16}$$

converga con somma $f(x)$, per ogni $x \in I$.

In tal caso, la funzione $f$ è detta *sviluppabile in serie di Taylor* di punto iniziale $x_0$ in $I$.

Il seguente esempio illustra che una funzione infinitamente derivabile non è necessariamente sviluppabile in serie di Taylor.

*Esempio* 3.1. Consideriamo la funzione definita su $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0, \\ \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $f$ è infinitamente derivabile e $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Pertanto la serie di Taylor di $f$ di punto iniziale 0 risulta convergente, ma ha per somma la funzione identicamente nulla.

I seguenti teoremi forniscono condizioni sufficienti per la sviluppabilità in serie di Taylor.

**Teorema 3.2.** *Sia $f$ infinitamente derivabile nell'intervallo $I$. Sia $x_0$ un punto interno a $I$ e sia $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$ ed esistano due numeri reali $L, M$ tali che*

$$|f^{(k)}(x)| \leq ML^k, \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r), \forall k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

*Allora $f$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale $x_0$ in $(x_0 - r, x_0 + r)$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$|R_n(x)| \leq \frac{M(Lr)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \text{ per } n \to \infty.$$

$\square$

**Teorema 3.3.** *Sia $f$ infinitamente derivabile nell'intervallo $I$. Sia $x_0$ un punto interno a $I$ e sia $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$ ed esista $M > 0$ tali che*

$$|f^{(k)}(x)| \leq Mk!r^{-k}, \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r), \forall k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

*Allora $f$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale $x_0$ in $(x_0-r, x_0+r)$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$|R_n(x)| \leq M \left(\frac{|x - x_0|}{r}\right)^{n+1} \to 0, \text{ per } n \to \infty.$$

$\square$

Se il punto iniziale è uguale a zero, la serie di Taylor è detta *serie di Mac Laurin.*

Il Teorema 3.2 garantisce la sviluppabilità in serie di Mac Laurin in ogni intervallo $(-r, r)$ delle funzioni $e^x$ ($L = 1$, $M = e^r$), $\sin x$ e $\cos x$ ($L = M = 1$), ottenendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

**Definizione 3.4.** Una funzione a valori reali $f$ definita su un intervallo $I$ è detta *analitica* in un punto $x_0 \in I$ se è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale $x_0$ in un intorno di $x_0$. Si dice analitica in $I$ se è analitica in ogni punto di $I$.

# 4 Serie di potenze

Le serie di funzioni della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ..., \quad x_0, x, a_k \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

sono dette *serie di potenze di punto iniziale $x_0$ e coefficienti $a_k$*. Ovviamente ogni serie di potenze converge con somma $a_0$ in $x = x_0$. Abbiamo visto nel precedente paragrafo esempi di serie di potenze: le serie di Taylor associate alle funzioni infinitamente derivabili.

Posto $L = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ $(0 \le L \le +\infty)$, definiamo *raggio di convergenza* della serie di potenze (19)

$$r = \begin{cases} 0, & \text{se } L = +\infty, \\ \frac{1}{L}, & \text{se } 0 < L < +\infty, \\ +\infty & \text{se } L = 0. \end{cases}$$

La definizione è motivata dal seguente teorema.

**Teorema 4.1.** *Se $r > 0$, per ogni $\rho$ tale che $0 < \rho < r$, la serie (19) converge totalmente (e quindi uniformemente) nell'intervallo chiuso $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$. Se $r < +\infty$, la serie (19) non è convergente in nessun punto $x$ tale che $|x - x_0| > r$.*

*Dimostrazione.* Sia $r > 0$ (ovvero $0 \le L < +\infty$) e sia $\rho \in (0, r)$. Si ha che

$$|f_k(x)| = |a_k(x-x_0)^k| \le |a_k|\rho^k, \forall x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho].$$

Applicando il criterio della radice alla serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\rho^k,$$

si ha

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\rho^k} = \rho \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \rho L < 1,$$

e quindi tale serie converge. Di conseguenza la serie (19) converge totalmente in $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$.

Se $r < +\infty$ (ovvero $0 < L \le +\infty$) e $x$ è tale che $|x - x_0| > r$, si ha

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = |x - x_0| \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1.$$

Pertanto il termine generale della serie (19) non è infinitesimo e quindi la serie non converge. □

*Osservazione* 4.2. In base al teorema 2.4, la somma di una serie di potenze avente raggio positivo $r$ è una funzione continua in $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Dal teorema precedente segue che una serie di potenze: se $r = 0$, converge solo in $x_0$; se $r = +\infty$, converge per ogni $x \in \mathbb{R}$; se $0 < r < +\infty$ converge per $|x - x_0| < r$, non converge per $|x - x_0| > r$, mentre non ci dà informazioni sul carattere della serie negli estremi dell'intervallo di convergenza $x = x_0 \pm r$. L'analisi delle serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x - x_0)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(x - x_0)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}(x - x_0)^k,$$

che hanno tutte raggio di convergenza $r = 1$, prova come negli estremi dell'intervallo di convergenza si può avere convergenza assoluta o convergenza semplice o divergenza o indeterminazione.

**Teorema 4.3.** *La serie* (19) *abbia raggio di convergenza* $r > 0$ *e sia* $f$ *la sua somma*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \qquad x \in (x_0 - r, x_0 + r). \tag{20}$$

*Allora le serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x - x_0)^{k-1},$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k(x - x_0)^{k-2},$$

$$\dots$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1) a_k(x - x_0)^{k-m},$$

$$\dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}$$

*hanno lo stesso raggio di convergenza* $r$ *della serie* (20)*. Inoltre la funzione* $f$ *è dotata delle derivate di ogni ordine in* $(x_0 - r, x_0 + r)$ *e si ha*

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1) a_k(x - x_0)^{k-m}, \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r). \tag{21}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}, \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r). \tag{22}$$

*Dimostrazione.* Proviamo la tesi per la prima delle serie elencate,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}. \tag{23}$$

Si ha

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k-1]{|ka_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k-1]{k} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k-1]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

quindi la serie (23) ha lo stesso raggio di convergenza della serie (20). Si osservi che la serie (23) è la serie ottenuta derivando termine a termine la serie (20). Per ogni fissato $\rho \in (0, r)$, la serie (23) converge uniformemente nell'intervallo $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$. Per il Teorema 2.5, si ha dunque che $f$ è derivabile in $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ e che ivi $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$.

Per ogni $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, esiste $\rho$ tale che $|x - x_0| \leq \rho < r$, e quindi $f$ è derivabile in $x$ e $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$.

Il caso delle derivate di ordine superiore segue per induzione.

Per quanto riguarda la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \tag{24}$$

si ha

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k+1]{\left|\frac{a_k}{k+1}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k+1]{\frac{1}{k+1}} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k+1]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

quindi la serie (24) ha lo stesso raggio di convergenza di (20). Sia $g$ la sua somma. Poichè la serie ottenuta derivando termine a termine la serie (24) coincide con la serie (20), da quanto appena dimostrato, segue che $g$ è derivabile e

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

Ne segue che $g$ è la primitiva di $f$ in $(x_0 - r, x_0 + r)$ verificante $g(x_0) = 0$, il che prova la (22).

□

*Osservazione* 4.4. Scegliendo $x = x_0$ nella formula (21), si ha $f^{(m)}(x_0) = m! a_m$, da cui

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}, \forall m \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

che fornisce i valori dei coefficienti di una serie di potenze in funzione delle derivate della sua somma $f$. In altri termini, si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \tag{26}$$

ovvero una serie di potenze convergente coincide con la serie di Taylor della sua somma. Dalla formula (25) segue che se due serie di potenze hanno la stessa somma, allora necessariamente hanno gli stessi coefficienti.

L'esempio 3.1 illustra che funzioni diverse possono avere la stessa serie di Taylor, naturalmente solo una di esse può essere sviluppabile in serie di Taylor.

Il teorema 4.3 garantisce che, derivando (integrando tra $x_0$ e $x$) termine a termine una serie di potenze avente raggio di convergenza positivo e somma una funzione nota, possiamo ricavare le serie di Taylor della sua derivata e della primitiva che si annulla in $x_0$. La nota formula che esprime la somma della serie geometrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ..., \quad |x| < 1, \tag{27}$$

rappresenta la funzione $\frac{1}{1-x}$ come somma di una serie di potenze di punto iniziale $x_0 = 0$, avente raggio di convergenza 1, e naturalmente è la sua serie di Taylor.

Integrando tra 0 e $x$ (ovvero calcolando la primitiva che si annulla in 0) si ottiene lo sviluppo in serie di Mac Laurin di $\log(1-x)$ per $|x| < 1$

$$\log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... \tag{28}$$

Cambiando $x$ in $-x$ nella serie (27) si ha, per $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + ... \tag{29}$$

e integrando quest'ultima serie termine a termine si ottiene lo sviluppo in serie di Mac Laurin di $\log(1+x)$ per $|x| < 1$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... \tag{30}$$

Cambiando $x$ in $-x^2$ nella (27), si ha, per $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... \tag{31}$$

Integrando (31), si ha, per $|x| < 1$,

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... \tag{32}$$

Sottraendo (28) da (30), si ha, per $|x| < 1$,

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... \tag{33}$$

Consideriamo la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$. Se $\alpha \in \mathbb{N}$, $f$ è un polinomio e la sua serie di Taylor è una somma finita. Ci interessa quindi il caso in cui $\alpha \notin \mathbb{N}$. Calcolando le derivate successive di $f$ si ha

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, ...,$$
$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

per cui i coefficienti della serie di Mac Laurin sono

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Si definiscono coefficienti binomiali

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \text{ per } k \geq 1, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Si verifica che

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 1,$$

da cui si ricava che, per $|x| < 1$, la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

converge per $|x| < 1$. Tale serie è la serie di Taylor di $f(x) = (1+x)^\alpha$ ma questo non garantisce che la sua somma sia proprio $f(x)$, come illustrato dall'esempio 3.1.

Indichiamo allora con $g(x)$ la somma della serie. Derivando termine a termine, si ha

$$(1+x)g'(x) = (1+x)\sum_{k=1}^{\infty} k\binom{\alpha}{k}x^{k-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\binom{\alpha}{j+1}x^j + \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{\alpha}{k}x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left((k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k}\right)x^k = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = \alpha g(x).$$

Posto $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = (1+x)^{-\alpha}g(x)$, si ha

$$h'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}g(x) + (1+x)^{-\alpha}g'(x) = 0,$$

da cui segue che $h$ è costante. Essendo $h(0) = g(0) = 1$, si ha che $h \equiv 1$, quindi $g(x) = (1+x)^\alpha$, ovvero

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+... \tag{34}$$

Scegliendo $\alpha = -\frac{1}{2}$ e sostituendo $x$ con $-x^2$ in (34), si ha, per $|x| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4\cdot 2}x^4 + \frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}x^6 + ... \tag{35}$$

dove $(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)$, $(2k)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)$, $0!! = (-1)!! = 1$. Integrando (35), si ha, per $|x| < 1$,

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}x^{2k+1} = x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{3}{4\cdot 2\cdot 5}x^5+\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2\cdot 7}x^7+... \tag{36}$$

# 5 Serie di Fourier

**Definizione 5.1** (*Funzioni periodiche*)**.** Sia $T > 0$. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T$ ($T$-periodica) se $f(t+T) = f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Evidentemente, se $f$ ha periodo $T$, ha anche periodo $kT$, per ogni intero positivo $k$. Ad esempio le funzioni $\sin t$ e $\cos t$ hanno periodo $2\pi$, ma anche $4\pi$, $6\pi$, ecc; per queste funzioni $2\pi$ è il periodo minimo.

Le funzioni costanti sono $T$-periodiche per ogni $T > 0$, quindi non hanno un periodo minimo. In generale, l'esistenza di un periodo minimo per una funzione periodica non costante non è scontata; ad esempio la funzione di Dirichlet (che assume valore 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali) ha periodo $q$, per ogni $q \in \mathbb{Q}^+$, quindi non ammette un periodo minimo.

**Proposizione 5.2.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, periodica e non costante. Allora $f$ ammette periodo minimo.*

*Dimostrazione.* Sia $H = \{T > 0 \ : \ T \text{ è periodo di } f\}$ e sia $\tau = \inf H$, $\tau \geq 0$. Per la seconda proprietà dell'estremo inferiore, esiste una scuccessione $T_n$, $T_n \in H$, tale che $\lim_{n\to\infty} T_n = \tau$. Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $f(t+T_n) = f(t)$. Per la continuità di $f$, si ha che $\lim_{n\to\infty} f(t+T_n) = f(t+\tau)$, quindi $f(t+\tau) = f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se $\tau > 0$, allora $\tau \in H$ ed è perciò il periodo minimo di $f$. Rimane quindi da provare che $\tau > 0$. Essendo $f$ non costante, esistono $s, t \in \mathbb{R}$, $s < t$, tali che $f(s) \neq f(t)$. Poniamo $\epsilon = |f(s) - f(t)| > 0$. Dalla continuità di $f$ in $t$ si ha che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $w \in R$, $|w - t| < \delta$, si ha $|f(w) - f(t)| < \epsilon$. Supponiamo per assurdo che sia $\tau = 0$. Esiste allora un periodo $T$ verificante $0 < T < \delta$. Esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $s + k_0T \leq t < s + (k_0+1)T$. Dunque $|t - (s + k_0T)| < T < \delta$, da cui $|f(s) - f(t)| = |f(s + k_0T) - f(t)| < \epsilon$, contraddicendo la definizione di $\epsilon$. □

Osserviamo che una funzione $T$-periodica è determinata dai suoi valori in un qualsiasi intervallo $[a, a+T)$ e che, se è integrabile, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ (segue dall'additività dell'integrale e operando un cambio di variabile).

Data $f : [a, a+T) \to \mathbb{R}$, la si può estendere per periodicità su $\mathbb{R}$ ottenendo una funzione $T$-periodica.

Le funzioni del tipo

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right), \tag{37}$$

al variare di $a_0$, $a_k$, $b_k \in \mathbb{R}$, sono $T$-periodiche; sono dette *polinomi trigonometrici* di grado $n$.

Si vuole studiare se le funzioni periodiche sono approssimabili (in un qualche senso) mediante i polinomi trigonometrici, ovvero se sono esprimibili come somma di una *serie trigonometrica*, cioè una serie della forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \tag{38}$$

per opportuni valori dei coefficienti $a_0$, $a_k$, $b_k \in \mathbb{R}$.

Cominciamo con l'osservare che, per $j, k = 1, 2, ...,$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) = \frac{T}{2}\delta_{kj}, \tag{39}$$

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) = \frac{T}{2}\delta_{kj}, \tag{40}$$

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) = 0. \tag{41}$$

La dimostrazione delle precedenti uguaglianze si ottiene facilmente usando le formule di Werner.

Considereremo due diverse modalità di convergenza delle serie trigonometriche: la convergenza puntuale e la convergenza in media quadratica.

Supponiamo, per ora, che la serie (38) sia uniformemente convergente su $\mathbb{R}$ e sia $f$ la sua somma:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right). \tag{42}$$

Essendo i termini della serie funzioni continue, applicando il teorema 2.6 possiamo integrare termine a termine e, usando le (39)–(41), si ha

$$\int_0^T f(t)dt = a_0 T, \tag{43}$$

$$\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt = \frac{T}{2}a_j, \quad j = 1, 2, ..., \tag{44}$$

$$\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt = \frac{T}{2}b_j, \quad j = 1, 2, ...,. \tag{45}$$

Dalle precedenti uguaglianze ricaviamo i coefficienti della serie (42) in funzione della sua somma $f$:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \tag{46}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt, \quad k = 1, 2, ..., \tag{47}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt, \quad k = 1, 2, .... \tag{48}$$

Alla luce di ciò, data una funzione $f$, $T$-periodica, limitata e integrabile su $[0,T]$, si definisce *serie di Fourier* di $f$ la serie (38) avente i coefficienti dati da (46)–(48), detti *coefficienti di Fourier* di $f$. Indicheremo inoltre con $S_n$ la somma parziale $n$-esima della serie di Fourier, ovvero

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right), \tag{49}$$

con i coefficienti dati da (46)–(48).

*Osservazione* 5.3. Considerando come intervallo di integrazione $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, e osservando che l'integrale di una funzione dispari su tale intervallo è nullo, si ricava che se $f$ è dispari $a_k = 0$, per ogni $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, mentre se $f$ è pari $b_k = 0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Pertanto la serie di Fourier di una funzione pari contiene solo coseni (oltre alla costante) e quella di una funzione dispari solo seni.

## 5.1 Convergenza in media quadratica delle serie di Fourier

Sia $\mathcal{P}_n$ l'insieme dei polinomi trigonometrici $s_n$ di grado $n$ e periodo $T$.

**Teorema 5.4.** *Sia $f$ una funzione $T$- periodica, limitata e integrabile su $[0,T]$. Allora*

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - s_n(t)|^2 dt \tag{50}$$

*assume minimo sull'insieme $\mathcal{P}_n$ in corrispondenza al polinomio trigonometrico $S_n$ i cui coefficienti sono i coefficienti di Fourier di $f$, cioè quelli dati dalle relazioni* (46)*–*(48)*. Inoltre*

$$\int_0^T |f(t) - S_n(t)|^2 dt = \int_0^T |f(t)|^2 dt - \frac{T}{2}\left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right), \tag{51}$$

$$2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt, \quad \textit{(disuguaglianza di Bessel).} \tag{52}$$

*Dimostrazione.* Sia

$$S_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)$$

con $a_0$, $a_k$, $b_k$ i coefficienti di Fourier di $f$ e sia

$$s_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)$$

il generico polinomio trigonometrico di grado $n$.

Tenendo conto delle (39)–(41) e delle (46)–(48), si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^T |f(t) - s_n(t)|^2 dt = \int_0^T |f(t)|^2 dt + T\alpha_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 +& \\
- 2T\alpha_0 a_0 - T\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k - T\sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k =& \\
= \int_0^T |f(t)|^2 dt + T(\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^2 + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} (\beta_k - b_k)^2& \\
- Ta_0^2 - \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2,&
\end{aligned}$$

che assume il valore minimo per $\alpha_k = a_k$, $k = 0, 1, 2...$, $\beta_k = b_k$, $k = 1, 2...$. D'altra parte, per $s_n = S_n$, si ha

$$0 \leq \int_0^T |f(t) - S_n(t)|^2 dt = \int_0^T |f(t)|^2 dt - \frac{T}{2}\left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right),$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$, segue la (52). □

Dalla disuguaglianza di Bessel deriva il seguente Corollario.

**Corollario 5.5** (Riemann-Lebesgue)**.** *Nelle ipotesi del teorema 5.4,*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = 0, \tag{53}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = 0. \tag{54}$$

Si può in realtà dimostrare (ma la dimostrazione richiede nozioni più avanzate) che in (52) sussiste l'uguaglianza (*identità di Parseval*). Passando quindi al limite per $n \to \infty$ in (51), si ricava che $S_n$ converge a $f$ in media quadratica, cioè $\lim_{n\to\infty} \int_0^T |f(t) - S_n(t)|^2 dt = 0$.

## 5.2 Convergenza puntuale delle serie di Fourier

**Definizione 5.6.** Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice *continua a tratti* se è continua tranne al più in un numero finito di punti nei quali esistono finiti il limite destro e sinistro.

Osserviamo che se $f$ è continua a tratti in $[a,b]$, allora è limitata e integrabile in $[a,b]$.

**Definizione 5.7.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremo che $f$ soddisfa la *condizione di Dirichlet* in un punto $t_0$ se
i) è derivabile in $t_0$;
oppure
ii) è continua in $t_0$ e dotata delle derivate destra $f'_+(t_0)$ e sinistra $f'_-(t_0)$;
oppure
iii) esistono finiti in $t_0$ i limiti destro $f(t_0^+)$ e sinistro $f(t_0^-)$ di $f$ e i seguenti limiti

$$\widetilde{f}'_+(t_0) := \lim_{t \to t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0^+)}{t - t_0}, \qquad \widetilde{f}'_-(t_0) := \lim_{t \to t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0^-)}{t - t_0}.$$

**Teorema 5.8.** *Sia $f$ una funzione $T$- periodica e continua a tratti in $[0,T]$. La serie di Fourier di $f$ converge in ogni punto $t_0$ in cui è soddisfatta la condizione di Dirichlet e la sua somma $s(t_0)$ è data da*

$$s(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}. \tag{55}$$

Per alleggerire le notazioni della dimostrazione osserviamo che, operando il cambio di variabile $x = \frac{2\pi}{T}t$, ci si può ricondurre al caso delle funzioni $2\pi$ periodiche e utilizzare come intervallo $[-\pi, \pi]$.

**Lemma 5.9** (Formula di Dirichlet)**.** *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, e per ogni $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$,*

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + ... + \cos nt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}. \tag{56}$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione si svolge per induzione. Per $n = 0$, la (56) è ovvia. Suppostala vera per $n-1$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + ... + \cos(n-1)t + \cos nt &= \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} + \cos nt = \\ &= \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)t + 2\sin\frac{t}{2}\cos nt}{2\sin\frac{t}{2}}. \end{aligned} \tag{57}$$

Dato che
$$\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t = \sin nt\cos\frac{t}{2} - \cos nt\sin\frac{t}{2},$$
sostituendo la precedente espressione in (57) si ha la tesi. $\square$

*Dimostrazione del teorema 5.8.* Ricordando le formule (46)–(48), si ha che la somma parziale ennesima $S_n(t_0)$ della serie di Fourier di $f$ in $t_0$ è data da
$$S_n(t_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kt_0 + \sin kt\sin kt_0)\right)dt. \tag{58}$$
Dalle formule di addizione degli angoli e operando un cambio di variabile, si ha
$$\begin{aligned}S_n(t_0) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-t_0)\right)dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-t_0}^{\pi-t_0} f(u+t_0)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku\right)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+t_0)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku\right)du.\end{aligned} \tag{59}$$
Rinominando $t$ la variabile di integrazione, si ha
$$S_n(t_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+t_0)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt. \tag{60}$$
Si verifica banalmente che
$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt = \frac{1}{2}. \tag{61}$$
Pertanto possiamo calcolare
$$\begin{aligned}S_n(t_0) - \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(f(t_0+t)-f(t_0^-)\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(t_0+t)-f(t_0^+)\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt.\end{aligned} \tag{62}$$
Usando la formula di Dirichlet (56), si ha
$$S_n(t_0) - \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\ dt, \tag{63}$$

dove

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(t_0+t)-f(t_0^-)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, & \text{per } -\pi \leq t < 0, \\ \\ 0, & \text{per } t = 0, \\ \\ \frac{f(t_0+t)-f(t_0^+)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, & \text{per } 0 < t < \pi. \end{cases} \tag{64}$$

Esistono finiti i limiti

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t_0+t)+f(t_0^+)}{t} \frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \widetilde{f}'_+(t_0), \tag{65}$$

$$\lim_{t\to 0^-} F(t) = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(t_0+t)+f(t_0^-)}{t} \frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \widetilde{f}'_-(t_0). \tag{66}$$

Dunque la funzione $F$ è continua a tratti, limitata e integrabile in $[-\pi, \pi)$ e si può quindi applicare il Corollario di Riemann Lebesgue 5.5 alle funzioni $F(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ e $F(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Da (62) si ha dunque

$$\begin{aligned} &S_n(t_0) - \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin nt\,dt \to 0, \end{aligned} \tag{67}$$

al tendere di $n$ a $+\infty$. □