Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: serie di Fourier

Prof. Franco Obersnel

($\chi_E : A \to \mathbb{C}$ è la funzione caratteristica dell'insieme E: $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$, $\chi_E(x) = 0$ se $x \in A \setminus E$.)

Esercizio 1 Delle seguenti funzioni $2\pi-$periodiche si calcoli la serie di Fourier e se ne discuta la convergenza.

(i) $f(x) = \chi_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x)$ per $x \in]-\pi,\pi]$.

(ii) $f(x) = x$ per $x \in]-\pi,\pi]$.

(iii) $f(x) = |x|$ per $x \in]-\pi,\pi]$.

(iv) $f(x) = x^2$ per $x \in]-\pi,\pi]$.

(v) $f(x) = \chi_{[0,\pi]}(x)$ per $x \in]-\pi,\pi]$.

Esercizio 2 Si usino i risultati dell'Esercizio 1 per calcolare la somma delle seguenti serie numeriche.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos(2n-1)$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \,\mathrm{sen}\,(2n)$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ (v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Soluzioni: $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, -1, $\frac{\pi^2}{8} - 1$, $-\frac{\pi^2}{12}$, $\frac{\pi^2}{6}$.

Esercizio 3 Si determinino le serie di Fourier delle seguenti funzioni periodiche di periodo T:

(i) $f(x) = 1 - 2x$ per $x \in]-\pi,\pi]$; $T = 2\pi$.

(ii) $f(x) = |x|$ per $x \in]-1,1]$; $T = 2$.

(iii) $f(x) = 2\,|1-x|$ per $x \in]-1,1]$; $T = 2$.

(iv) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ per $x \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$; $T = 1$.