Riassuntivi per la seconda prova scritta di esercizi

Compito A

Esercizio 1. Si utilizzino i limiti notevoli noti per calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log(\sqrt{e^x + x})}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x} \cdot \sqrt[3]{x-1}$.

a) Si determini il dominio di f, si determinino gli zeri di f e si stabiliscano gli intervalli in cui f è positiva e negativa. b) Si calcolino i limiti di f per $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$. c) Si calcoli la derivata di f in tutti i punti del dominio e si stabilisca se f è derivabile su di esso. d) Si trovino eventuali punti di estremo relativo (specificando se di massimo o minimo). Si determinino inoltre $\sup f$ e $\inf f$. e) Si scriva l'equazione della retta tangente il grafico di f nei punti $(0,-1)$, $(1,0)$, $(2, e^{-2})$.

Esercizio 3. Si scriva l'equazione della retta passante per l'origine tangente il grafico della curva di equazione $y = x^3 + 2$.

Compito B

Esercizio 1 Si utilizzino i limiti notevoli noti per calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{arctg}^2 x} - \cos x}{x^2}$.

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen} x & \text{se } x \in [0,1], \\ \sqrt[3]{x-a} + b & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

a) Si determini una relazione tra i parametri reali a e b in modo tale che f sia continua su $[0,+\infty[$. b) Si trovino i parametri reali a e b in modo tale che la f ammetta derivata su $[0,+\infty[$. c) Si stabilisca se la funzione così trovata è derivabile e si scriva l'approssimante lineare di f nei punti $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$.

Esercizio 3 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(1+|x|) - \frac{4x^2+1}{1+|x|}.$$

a) Si stabilisca se f ammette qualche simmetria.
b) Si calcoli $f'(x)$ nei punti in cui f è derivabile, e $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ nei punti x in cui f non è derivabile.
c) Si determinino i punti di annullamento e i segni di f'.
d) Si determinino gli intervalli di $\mathbb{R}$ su cui f è crescente o decrescente.
e) Si trovino i punti di estremo relativo di f.

Compito C

Esercizio 1 Si utilizzino i limiti notevoli noti per calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1} - x}$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua con la proprietà che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x) - \frac{1}{f(x)} = x.$$

a) Si provi che $f(0)^2 = 1$.
b) Si verifichi che $f(x)$ è sempre positiva oppure è sempre negativa.
c) Si provi che se $f(0) = 1$ si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Esercizio 3 Sia

$$f(x) = x(\operatorname{arcsen} x - \frac{x}{2}) + \sqrt{1-x^2}.$$

Dopo averne stabilita l'esistenza, si calcoli $\max f$ e $\min f$.

Soluzioni

A

1. Poiché $x>0$ si ha $\sqrt{x^2}=x$; possiamo allora scrivere l'argomento del limite nella forma $\sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}}\cdot \frac{\frac{1}{2}\log(e^x(1+xe^{-x}))}{x}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}}\cdot\frac{x+\log(1+xe^{-x})}{x}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}}\cdot\left(1+\frac{\log(1+xe^{-x})}{xe^{-x}}\cdot e^{-x}\right)\to\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}(1+1)=\sqrt{2}$.

2. a) $\mathbb{R}$, $f(1)=0$, $f(x)>0$ se $x\in\,]1,+\infty[$, $f(x)<0$ se $x\in\,]-\infty,1[$. b) $-\infty$, 0. c) $f'(x)=(\frac{4}{3}-x)\frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ se $x\neq1$; $f'(1)=+\infty$; f non è derivabile in 1. d) $x=\frac{4}{3}$ punto di massimo assoluto, $\sup f=\max f=f(\frac{4}{3})=\sqrt[3]{\frac{1}{3e^4}}$, $\inf f=-\infty$. e) $y=\frac{4}{3}x-1$; $x=1$; $y=\frac{e^{-2}}{3}(-2x+7)$.

3. $f(x)=x^3+2$; $f'(x)=3x^2$. La retta tangente il grafico di f nel punto (x_0,y_0) ha equazione $y=3x_0^2(x-x_0)+y_0$. Imponendo il passaggio per l'origine si ha $y_0=3x_0^3$. Inoltre il punto (x_0,y_0) appartiene al grafico di f, da cui $y_0=x_0^3+3$, perciò $3x_0^3=x_0^3+2$ e $x_0=1$. La soluzione è pertanto $y=3x$.

B

1. $\frac{e^{\operatorname{arctg}^2 x}-\cos x}{x^2}=\frac{e^{\operatorname{arctg}^2 x}-1}{\operatorname{arctg}^2 x}\cdot\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2+\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{3}{2}$.

2. a) $\sqrt[3]{1-a}+b=\frac{\pi}{2}$. b) $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-\frac{\pi}{2}}{x-1}=+\infty$; $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt[3]{x-a}+\frac{\pi}{2}-\sqrt[3]{1-a}-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-a)^2}}$ se $a\neq1$ e $+\infty$ se $a=1$; quindi $a=1$ e $b=\frac{\pi}{2}$. c) f non è derivabile in 1; $y=x$, $x=1$, $y=\frac{1}{3}x+\frac{2+3\pi}{6}$.

3. a) f è pari. b) $f'(x)=\frac{-4x^2-7x+2}{(1+x)^2}$ se $x>0$, $f'(x)=\frac{4x^2-7x-2}{(1-x)^2}$ se $x<0$. $f'_-(0)=-f'_+(0)$; $f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+x)}{x}-\frac{\frac{4x^2+1}{1+x}-1}{x}=2$. c) f' si annulla in $\frac{1}{4}$ e in $-\frac{1}{4}$; $f'(x)>0$ su $]-\infty,-\frac{1}{4}[$ e su $]0,\frac{1}{4}[$; $f'(x)<0$ su $]-\frac{1}{4},0[$ e su $]\frac{1}{4},+\infty[$. d) f è crescente su $]-\infty,-\frac{1}{4}]$ e su $[0,\frac{1}{4}[$; f è decrescente su $[-\frac{1}{4},0]$ e su $[\frac{1}{4},+\infty[$. e) 0 è punto di minimo relativo per f; $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ sono punti di massimo relativo.

C

1. $\frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1}-x}=\frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x^2-1-x^2}=\frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\cdot(-1)(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1=-2$.

2. b) Altrimenti per il teorema di esistenza degli zeri la f dovrebbe annullarsi in un punto x_0, ma $f(x)\neq0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. c) Usando la definizione di limite. Se $f(0)=1$, allora f è positiva su $\mathbb{R}$. Fissato $M\in\mathbb{R}$, se $x>M$ si ha $x+\frac{1}{f(x)}=f(x)>M$. Se fisso $\varepsilon>0$, prendo $K=-\frac{1}{\varepsilon}$, allora se $x<K$ si ha $-\frac{1}{f(x)}<-\frac{1}{f(x)}+f(x)=x<-\frac{1}{\varepsilon}$ da cui $f(x)<\varepsilon$.

3. f è continua sul dominio chiuso e limitato $[-1,1]$, quindi ammette massimo e minimo per il teorema di Weierstrass. Inoltre f è una funzione pari, è sufficiente studiarla su $[0,1]$. Si ha $f'(x)=\operatorname{arcsen} x-x$. Per studiare il segno di $f'(x)$ osservo che $f''(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\geq0$ per ogni $x\in[0,1]$, quindi f' è crescente e poiché $f'(0)=0$ si ha $f'(x)>0$ per ogni $x\in\,]0,1]$. Dunque f è crescente su $[0,1]$ e quindi $\min f=f(0)=1$, $\max f=f(1)=f(-1)=\frac{\pi-1}{2}$.