

**Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.**  
**Esercizi riassuntivi per la prima prova scritta**  
*Dott. Franco Obersnel*

**Esercizio 1** Si usi il principio di induzione per provare la validità della seguente disuguaglianza (di Bernoulli):

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $h \in \mathbb{R}$  con  $h > -1$  si ha

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

**Esercizio 2** Si provi che per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k \right| = 1.$$

**Esercizio 3** Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{3 - \log_2(8 - x^3)}.$$

Si trovi il dominio di  $f$ . Si studi il segno di  $f$ . Si trovino eventuali intervalli sui quali  $f$  è monotona. Si trovi l'inversa di  $f$  su tali intervalli.

**Esercizio 4** È data la successione

$$x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cdot 2^{\frac{1}{n}}.$$

Si stabilisca, motivando la risposta, se la successione  $\langle x_n \rangle$  è limitata, crescente, convergente, divergente. Sia  $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}^+\}$ . Si trovino  $\sup A$ ,  $\inf A$ , e si stabilisca se sono minimo e/o massimo. Si trovino i punti di accumulazione e i punti isolati di  $A$ .

Si trovi  $\sup A \cap \mathbb{R}^+$  e  $\inf A \cap \mathbb{R}^+$ .

**Esercizio 5** Si provi che per ogni  $n \in \mathbb{N}^+$  si ha

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

**Esercizio 6** Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin(2x) - 2\cos(3x).$$

Si trovi il dominio di  $f$ . Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione  $f$  è periodica, e in tale caso si determini il suo periodo minimo. Si verifichi che sull'intervallo  $[0, \frac{\pi}{4}]$  la funzione  $f$  è monotona specificando se si tratta di crescita o decrescenza.

**Esercizio 7** Si consideri la funzione

$$f(x) = \log_2(|1 - \arcsin x|).$$

Si trovi il dominio di  $f$ . Si studi il segno di  $f$ . Si trovino eventuali intervalli sui quali  $f$  è monotona. Detto  $E$  l'insieme immagine di  $f$ , si determini  $\inf E$  e  $\sup E$  e si stabilisca se  $E$  è dotato di minimo e/o massimo.