

Università di Trieste – Facoltà d’Ingegneria.

Corso di laurea in matematica

Corso di Analisi Matematica 2: parte del prof. F. Obersnel.

Anno Accademico 2022/2023

(E. Rosset, S. Cuccagna, F. Obersnel)

Proprietà topologiche delle funzioni negli spazi metrici. Funzioni tra spazi metrici. Limiti di funzioni tra spazi metrici. Funzioni continue. Funzioni uniformemente continue. Proprietà delle funzioni continue e delle funzioni uniformemente continue (composta, combinazione lineare, prodotto, quoziente...). Campi scalari e campi vettoriali. Componenti di una funzione a valori vettoriali. Proprietà di separazione di Hausdorff in uno spazio metrico. Teorema dell’unicità del limite. Teorema sul limite della restrizione. Tecniche per controllare la non esistenza del limite per \mathbf{x} che tende a \mathbf{x}^0 di una funzione. Esempi di funzioni continue non uniformemente continue. Curve e superfici parametrizzate. Equazione parametrica della circonferenza e della sfera. Coordinate polari e sferiche. Norma e prodotto scalare sono funzioni continue rispetto alla metrica indotta. Caratterizzazione del limite di una funzione usando i limiti delle successioni. Esempi: l’integrale come funzione continua tra $C^0([a, b], \mathbb{R})$ (con la distanza d_∞) e \mathbb{R} ; la derivazione non è continua tra $C^1([a, b], \mathbb{R})$ (con la distanza d_∞) e $C^0([a, b], \mathbb{R})$ (con la distanza d_∞). Funzioni uniformemente continue conservano la proprietà di Cauchy delle successioni. Teorema sui limiti delle componenti di una funzione a valori vettoriali. Gli spazi di funzioni $B(X, Y)$ e $C_B(X, Y)$ e loro completezza. Un esempio di una successione di funzioni convergente puntualmente ma non in norma $\|\cdot\|_\infty$. Teorema di compattezza e teorema di Weierstrass. Un esempio di funzione definita su un chiuso e limitato che non ha massimo. Insiemi di livello di una funzione. Relazione tra la continuità di una funzione e le proprietà topologiche degli insiemi di livello. Relazione tra la continuità di una funzione e le proprietà topologiche del grafico (chiusura, compattezza). Funzioni uniformemente continue e funzioni sottolineari. Funzioni Lipschitziane e funzioni Hölderiane. Ordini di infinitesimo reali, sottolineari, infrareali, superlineari. Teorema di Heine-Cantor di uniforme continuità sui compatti. Estensione (prolungamento) di una funzione. Teorema di esistenza del prolungamento continuo di una funzione uniformemente continua. Funzioni uniformemente continue mandano limitati di \mathbb{R}^N in limitati. Punti fissi per una funzione. Qualche motivazione (cenni a un equilibrio di un sistema dinamico discreto e alla risoluzione di un’equazione differenziale). Contrazione. Teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli. Insiemi connessi per archi e per poligonalità. Teorema di connessione. Teorema di esistenza degli zeri in uno spazio metrico.

Serie numeriche e serie di funzioni. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme (definizione analitica e interpretazione grafica). La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale (non viceversa). Il teorema di continuità del limite uniforme. Il teorema dei due limiti.

Il teorema di passaggio del limite sotto il segno integrale. Il teorema sulla derivata del limite di una successione di funzioni (dimostrazione sotto ipotesi C^1). Esempi e controesempi. Serie di funzioni. Serie puntualmente e uniformemente convergenti. Condizione di Cauchy per la convergenza uniforme. Condizione necessaria per la convergenza uniforme di una serie di funzioni. M -Test di Weierstrass. L'utilizzo della stima d'errore di Leibniz per la dimostrazione della convergenza uniforme di una serie. Sviluppabilità di una funzione rispetto a una famiglia di funzioni base Φ . Gli esempi delle serie di Fourier e delle serie di potenze di centro un punto. Serie di potenze. Insieme di convergenza di una serie di potenze. Proprietà dell'insieme di convergenza di una serie di potenze: raggio e intervallo di convergenza, convergenza uniforme nei compatti contenuti nell'intervallo di convergenza, proprietà caratteristiche del raggio di convergenza. Continuità della serie di potenze. Integrazione a termine a termine di una serie di potenze. Derivazione a termine a termine di una serie di potenze. Serie di Taylor di una funzione di classe $C^\infty(I)$. Sviluppabilità di una funzione in serie di potenze e polinomio di Taylor. Un esempio di funzione non sviluppabile in serie di potenze che ammette una serie di Taylor convergente. Un criterio di sviluppabilità. Esempi notevoli: esponenziale, funzioni circolari, funzioni iperboliche, il logaritmo, l'arcotangente, la serie binomiale (senza la dimostrazione della sviluppabilità), le funzioni arcoseno e arcocoseno. Cenni alla trasmissione di un segnale: codifica e digitalizzazione. Il metodo di campionamento. Il metodo di decomposizione in blocchi base. Lo spazio $L^2(]-\pi, \pi])$. Ortogonalità. Teorema di Pitagora. Famiglie ortonormali. Base ortonormale canonica reale in $L^2(]-\pi, \pi])$. La proiezione ortogonale su un sottospazio di dimensione finita e il teorema di migliore approssimazione. Polinomi di Fourier e coefficienti di Fourier (in forma reale). Il caso delle funzioni dispari e delle funzioni pari. Linearità dei coefficienti. Esempi di calcolo dei coefficienti di Fourier. Il caso di funzioni T -periodiche con $T \neq 2\pi$. Serie di Fourier di una funzione $f \in L^1(]-\pi, \pi])$. Disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval. Il teorema di convergenza in media quadratica (solo enunciato). Il lemma di Riemann Lebesgue (dimostrazione solo nel caso L^2). Il problema della convergenza puntuale. Cenni storici (i risultati di Du Bois Reymond, di Katznelson e Kahane, di Carleson e Hunt, di Kolmogorov). Il nucleo di Dirichlet. Il teorema di Dirichlet-Weierstrass. Il teorema generale di convergenza uniforme. Il teorema di convergenza uniforme per funzioni C^1 a tratti. Serie di Fourier della funzione derivata e della funzione integrale. Regolarità e ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier.