Università di Trieste

Lauree in ingegneria elettronica e informatica e in ingegneria industriale (energia elettrica e dei sistemi)

Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (030IN); parte del corso tenuta dal prof. F. Obersnel
Anno Accademico 2019/2020

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Motivazioni e premesse storiche. Forma cartesiana di un numero complesso. Parte reale e parte immaginaria. Somma e prodotto di numeri complessi, opposto e reciproco di un numero complesso. Proprietà algebriche. Il campo dei numeri complessi. $\mathbb{C}$ non è un campo ordinato. Numeri reali come particolari numeri complessi. Coniugato di un numero complesso. Modulo di un numero complesso. Proprietà del modulo. Piano di Gauss - Argand. Forma polare di un numero complesso. Modulo, argomento e argomento principale di un numero complesso. Notazione esponenziale. Prodotto e potenze di numeri complessi in forma polare: formula di De Moivre. Interpretazione del prodotto come rotazione nel piano di Gauss. Forma matriciale di un numero complesso. Soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^n = w$: radici $n-$esime di un numero complesso. Metrica e topologia in $\mathbb{C}$: palla aperta $B(z_0, r)$, intorno di un punto, punti interni, punti di frontiera, punti di accumulazione di un insieme, insieme aperto, insieme chiuso, chiusura di un insieme, insiemi limitati. Insiemi compatti. Caratterizzazione dei compatti usando le successioni. Successioni di numeri complessi. Limite di una successione. Piano complesso esteso e cenni alla sfera di Riemann. Intorno di ∞. Serie di numeri complessi. Somma di una serie. Relazione tra convergenza di una successione/serie e delle rispettive successioni/serie delle parti reali e immaginarie. Serie assolutamente convergenti. Cenni alla nozione di ordine di infinitesimo. Ordine reale e ordine soprareale.

Funzioni complesse di variabile complessa. Parte reale e parte immaginaria di una funzione f. Interpretazione di una $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ come mappa di $\mathbb{R}^2$. Esempi: traslazioni, rotazioni, riflessioni. Limite finito e infinito per $z \to z_0$ o per $z \to \infty$ di una funzione. Funzioni continue. Teorema sul limite delle componenti. Teoremi di continuità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta. Curve parametriche in $\mathbb{C}$. Insiemi connessi (per archi). Teorema di connessione. Teorema di Weierstrass. Continuità delle funzioni razionali. La funzione argomento principale. La funzione radice $n-$esima (determinazione principale). Funzione derivabile in un punto. Teoremi di derivabilità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta. Teorema di continuità di una funzione derivabile. Condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann. Derivata e condizioni di Cauchy-Riemann in forma polare. Le condizioni di Cauchy-Riemann non sono sufficienti per la derivabilità. Teorema di caratterizzazione delle funzioni derivabili (solo enunciato). Funzioni olomorfe. Funzioni intere. Un esempio di una funzione derivabile in un punto non olomorfa. Serie di potenze. Lemma di Abel, disco e raggio di convergenza. Convergenza uniforme. Derivazione e integrazione a termine a termine. Funzioni analitiche. Funzione esponenziale, funzioni circolari e funzioni iperboliche definite come serie. Proprietà principali della funzione esponenziale. Proprietà principali delle funzioni circolari e delle funzioni iperboliche, formule di addizione, parti reale e immaginaria delle funzioni circolari. Equazioni del tipo $\operatorname{sen} z = c$. La funzione logaritmo (determinazione principale) e le sue proprietà.

Integrazione complessa e funzioni analitiche. Curve regolari e regolari a tratti in $\mathbb{C}$. Integrale su una curva derivabile di una funzione complessa. Somma di curve. Curve semplici, curve chiuse. Circuiti (lacci). Teorema della curva chiusa di Jordan (solo enunciato). Interno e esterno di una curva semplice chiusa. Curve equivalenti, orientazione di una curva. Curva $-\gamma$. Proprietà dell'integrale: linearità, additività, integrale della curva $-\gamma$, indipendenza dalla parametrizzazione equiversa, formula di stima del modulo dell'integrale. Passaggio del limite nell'integrale in caso di convergenza uniforme. Primitive e funzioni primitivabili. Funzioni localmente primitivabili. Formula di Torricelli-Barrow in $\mathbb{C}$. Circuitazione (integrale su una curva chiusa) di una funzione primitivabile. La funzione $\frac{1}{z}$ non è primitivabile sul suo dominio ma è localmente primitivabile. Teorema di Cauchy (dimostrazione per funzioni C^1 e curve regolari a tratti). Il teorema dei due circuiti. Formula integrale di Cauchy per una funzione e teorema della media. Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe. Formule integrali di Cauchy per le derivate. Teorema di Morera. Il teorema di caratterizzazione delle funzioni primitivabili (solo enunciato). Aperti semplicemente connessi. Disuguaglianze di Cauchy. Teorema di Liouville. Il Teorema Fondamentale dell'Algebra. Il principio di massimo per le funzioni olomorfe (solo enunciato). Molteplicità di uno zero di una funzione analitica. Un teorema sulle funzioni che in un punto hanno tutte le derivate nulle. Proprietà degli insiemi degli zeri di una funzione analitica. Il principio di identità per le funzioni analitiche. Prolungamento analitico. Unicità del prolungamento analitico.

Punti singolari di una funzione e teoria dei residui. Punti singolari isolati di una funzione. Classificazione delle singolarità isolate: singolarità eliminabile (definizione, esistenza del limite e del prolungamento analitico), polo di ordine n (definizione, esistenza del limite, caratterizzazione dell'ordine), singolarità essenziale (definizione, non esistenza del limite). Esempio di singolarità essenziale. Teorema di Picard (solo enunciato). Residuo di una funzione in un punto singolare isolato. Formula per il calcolo del residuo per un polo di ordine n. Formula per il calcolo del residuo di funzioni razionali nei poli semplici con utilizzo della derivata del denominatore. Osservazione sui residui nei poli coniugati delle funzioni razionali a coefficienti reali. Serie bilatera. Corona circolare $C(z_0; r_1, r_2)$. Insieme di convergenza di una serie bilatera. Teorema di Laurent. Parte caratteristica (singolare) di una serie bilatera. Classificazione delle singolarità e serie di Laurent. Residuo di una serie di Laurent. Il 'metodo dei residui" per il calcolo della parte caratteristica di una serie di Laurent in un intorno forato di un polo di ordine k.