Università di Trieste

Lauree in ingegneria elettronica e informatica e in ingegneria industriale (energia elettrica e dei sistemi)

Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (030IN); parte del corso tenuta dal prof. F. Obersnel
Anno Accademico 2017/2018

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Motivazioni e premesse storiche. Forma cartesiana di un numero complesso. Parte reale e parte immaginaria. Somma e prodotto di numeri complessi, opposto e reciproco di un numero complesso. Proprietà algebriche. Il campo dei numeri complessi. Numeri reali come particolari numeri complessi. Coniugato di un numero complesso. Piano di Gauss - Argand. Forma polare di un numero complesso. Modulo, argomento e argomento principale di un numero complesso. Proprietà del modulo. Notazione esponenziale e giustificazione con le serie di potenze. Prodotto e potenze di numeri complessi in forma polare: formule di De Moivre. Interpretazione del prodotto come rotazione nel piano di Gauss. Forma matriciale di un numero complesso. Soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^n = w$: radice $n-$esima di un numero complesso. Topologia in $\mathbb{C}$. Struttura metrica di $\mathbb{C}$. Palla aperta $B(z_0, r)$. Intorno di un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Piano complesso esteso e cenni alla sfera di Riemann. Intorno di ∞. Punti interni, punti di frontiera, punti di accumulazione di un insieme. Insieme aperto, insieme chiuso, chiusura di un insieme. Insiemi limitati, Insiemi compatti. Successioni e serie di numeri complessi. Limite di una successione, somma di una serie. Serie di potenze complesse. La serie geometrica. Serie assolutamente convergenti.

Funzioni complesse di variabile complessa. Parte reale e parte immaginaria di una funzione f. Interpretazione di una $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ come mappa di $\mathbb{R}^2$. Esempi: traslazioni, rotazioni, riflessioni. Limite finito e infinito per $z \to z_0$ o per $z \to \infty$ di una funzione. Funzioni continue. Teorema sul limite delle componenti. Teoremi di continuità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta (sole enunciati). Curve parametriche in $\mathbb{C}$. Insiemi connessi (per archi). Teorema di connessione. Teorema di Weierstrass. Continuità delle funzioni razionali. La funzione argomento principale non è continua. La funzione radice $n-$esima (determinazione principale). Funzione derivabile in un punto. Teoremi di derivabilità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta (sole enunciati). Teorema di continuità di una funzione derivabile. Cenni alle funzioni differenziabili; equivalenza tra derivabilità e differenziabilità. Condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann. Derivata e condizioni di Cauchy-Riemann in forma polare. Le condizioni di Cauchy-Riemann non sono sufficienti per la derivabilità. Teorema di caratterizzazione delle funzioni derivabili (solo enunciato). Funzioni olomorfe. Funzioni intere. Un esempio di una funzione derivabile in un punto non olomorfa. Derivabilità della funzione radice $n-$esima. Serie di potenze. Lemma di Abel, disco e raggio di convergenza. Derivazione e integrazione a termine a termine. Funzioni analitiche. Esempi di calcolo della somma di una serie di potenze riconducibile alla serie geometrica. Funzione esponenziale, funzioni circolari e funzioni iperboliche definite come serie. Proprietà principali della funzione esponenziale. Funzione logaritmo (determinazione principale). Funzione potenza di esponente complesso. Proprietà principali delle funzioni circolari e delle funzioni iperboliche, formule di addizione, parti reale e immaginaria delle funzioni circolari. Equazioni del tipo $\operatorname{sen} z = c$.

Integrazione complessa e il Teorema di Cauchy. Curve regolari e regolari a tratti in $\mathbb{C}$. Integrale su una curva derivabile di una funzione complessa. Somma di curve. Curve semplici, curve chiuse. Circuiti (lacci). Teorema della curva chiusa di Jordan (solo enunciato). Interno e esterno di una curva semplice chiusa. Curve equivalenti, orientazione di una curva. Curva $-\gamma$. Proprietà dell'integrale: linearità, additività, integrale della curva $-\gamma$, indipendenza dalla parametrizzazione equiversa, formula di stima del modulo dell'integrale. Passaggio del limite nell'integrale in caso di convergenza uniforme. Primitive e funzioni primitivabili. Formula di Torricelli-Barrow in $\mathbb{C}$. Circuitazione (integrale su una curva chiusa) di una funzione primitivabile. La funzione $\frac{1}{z}$ non è primitivabile sul suo dominio. Funzioni localmente primitivabili. Teorema di Cauchy (dimostrazione per funzioni C^1 e curve regolari a tratti). Il teorema dei due circuiti. Formula integrale di Cauchy per una funzione e teorema della media. Funzioni analitiche in $\mathbb{C}$. Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe. Formule integrali di Cauchy per le derivate. Teorema di Morera. Il teorema di caratterizzazione delle funzioni primitivabili (solo enunciato). Aperti semplicemente connessi. Disuguaglianze di Cauchy. Teorema di Liouville. Il Teorema Fondamentale dell'Algebra. Il principio di massimo per le funzioni olomorfe (solo enunciato). Molteplicità di uno zero di una funzione analitica. Un teorema sulle funzioni che in un punto hanno tutte le derivate nulle. Proprietà degli insiemi degli zeri di una funzione analitica. Il principio di identità per le funzioni analitiche. Prolungamento analitico. Unicità del prolungamento analitico.

Punti singolari di una funzione e teoria dei residui. Punti singolari isolati di una funzione. Classificazione delle singolarità isolate: singolarità eliminabile (definizione, esistenza del limite e del prolungamento analitico), polo di ordine n (definizione, esistenza del limite, caratterizzazione dell'ordine), singolarità essenziale (definizione, non esistenza del limite). Esempio di singolarità essenziale. Teorema di Picard (solo enunciato). Residuo di una funzione in un punto singolare isolato. Formula per il calcolo del residuo per un polo di ordine n. Formula per il calcolo del residuo di funzioni razionali nei poli semplici con utilizzo della derivata del denominatore. Osservazione sui residui nei poli coniugati delle funzioni razionali a coefficienti reali. Serie bilatera. Corona circolare $C(z_0; r_1, r_2)$. Insieme di convergenza di una serie bilatera. Teorema di Laurent. Parte caratteristica (singolare) di una serie bilatera. Classificazione delle singolarità e serie di Laurent. Residuo di una serie di Laurent. Esempio di applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati per il calcolo dei termini di una serie di Laurent. Esempio di applicazione del "metodo delle derivate" per il calcolo della parte caratteristica di una serie di Laurent. Funzioni razionali: metodo dei residui per la decomposizione in frazioni semplici. Il teorema dei residui. Calcolo di integrali con il metodo dei residui. Integrali del tipo $\int_\gamma f(z)\,dz$. Valor principale (di Cauchy) e integrali del tipo $PV\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Lemma del grande cerchio e lemma del piccolo cerchio e loro applicazioni. Lemma di Jordan. Applicazioni al calcolo di integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx$ e delle trasformate di Fourier. Integrali del tipo $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ con f funzione di $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$. Le funzioni seno cardinale e integral-seno. Calcolo dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. Calcolo degli integrali $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \cos x}{x^2+a^2}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$.

Trasformate di Laplace. Trasformata di Laplace di un segnale. Funzioni di ordine esponenziale. Funzione di Heaviside. Teorema sul dominio della trasformata. Ascissa, retta, semipiano di convergenza. Analiticità della trasformata. La trasformata è infinitesima per $\Re e(s) \to +\infty$. Derivata $k-$esima della trasformata. Trasformata di una funzione polinomiale. Smorzamento, traslazione, riscalamento. Trasformata delle funzioni $\operatorname{sen}(\omega t), \operatorname{senh}(\omega t), \cos(\omega t), \cosh(\omega t)$. Funzioni "porta" e impulso di durata h, cenni alla distribuzione delta di Dirac δ_0 e alla sua trasformata. La funzione Gamma di Eulero e le sue principali proprietà. Trasformata delle funzioni t^α (in particolare $f(t) = \sqrt{t}$ e $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$). Trasformata di una funzione periodica. Trasformata della derivata (dimostrazione solo nel caso in cui f' e f sono trasformabili ed esiste finito il limite di f in 0). Trasformata della derivata $n-$esima. La formula per funzioni con discontinuità isolate di tipo salto. Prodotto di convoluzione di due funzioni; trasformata del prodotto di convoluzione (solo enunciato). Trasformata di una primitiva. Applicazione delle trasformate alle equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti. Funzione di trasferimento, risposta impulsiva, risposta forzata. Il problema della trasformata inversa. Iniettività dell'operatore $\mathcal{L}$ sulle funzioni continue a tratti (solo enunciato). La formula di Bromwich-Mellin / Riemann-Fourier (solo enunciato). Esempio di calcolo dell'antitrasformata usando la formula. Scorciatoie per il calcolo dell'antitrasformata. Antitrasformata delle funzioni razionali. I teoremi del valore finale e del valore iniziale (dimostrazioni nel caso di f' integrabile). Trasformate del seno cardinale e del seno integrale. Applicazione delle trasformate ai sistemi lineari. Applicazione delle trasformate alla funzioni integrali e integro-differenziali. Esempio di applicazione delle trasformate alle equazioni alle derivate parziali; il caso dell'equazione del calore. Applicazioni ai circuiti elettrici; ammettenza e impedenza di trasferimento.

Testi consigliati

G.C. Barozzi, *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*, Zanichelli, Bologna, 2007.

G. Tironi, Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (scaricabile dal sito).

Alla pagina http://www.dmi.units.it/˜obersnel potete trovare ulteriori informazioni sul corso, gli esercizi assegnati a lezione, esempi di compiti d'esame.