

Università di Trieste – Facoltà d’Ingegneria.

Corsi di laurea in
ingegneria civile e ambientale e ingegneria elettronica e informatica

Corso di Analisi Matematica 2. Anno Accademico 2024/2025

Prof. Franco Obersnel

Serie numeriche e serie di funzioni. Il concetto di somma infinita. Serie di numeri complessi. Carattere di una serie. Termine generale di una serie. Ridotta (somma parziale) n -esima di una serie. Serie convergente, divergente, indeterminata. Serie geometrica di ragione $z \in \mathbb{C}$. Condizione necessaria (non sufficiente) per la convergenza di una serie. Il carattere di una serie non viene modificato modificando un numero finito di termini. Aut aut per le serie a termini positivi. Criterio del confronto per le serie a termini positivi. Le serie come particolari integrali generalizzati. Carattere della serie armonica. Carattere della serie armonica generalizzata. Criterio di Cauchy per la convergenza di una successione in \mathbb{R} o \mathbb{C} (solo enunciato). Criterio di Cauchy per la convergenza di una serie. Dimostrazione della divergenza della serie armonica usando il criterio di Cauchy. Serie somma di due serie. Serie prodotto di una costante per una serie. Criteri del confronto asintotico e dell’ordine di infinitesimo. Criterio del rapporto e della radice. Se per una serie è applicabile il criterio del rapporto, allora il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine soprareale. Successioni di numeri complessi. Legame tra la convergenza di una successione (e di una serie) di numeri complessi e la convergenza delle successioni (e delle serie) delle parti reale e immaginaria. Serie a termini complessi assolutamente convergenti e serie semplicemente convergenti. Una serie assolutamente convergente è convergente. L’esempio della serie di Leibniz. Criterio di convergenza di Leibniz per le serie a termini di segno alterno. Stima della somma di una serie a termini di segno alterno. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme (definizione analitica e interpretazione grafica). La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale (non viceversa). Il teorema dei due limiti. Il teorema di continuità del limite uniforme. Il teorema di integrabilità del limite uniforme (senza la dimostrazione dell’integrabilità del limite). Il teorema sulla derivata del limite di una successione di funzioni. Esempi e controesempi. Serie di funzioni. Serie puntualmente e uniformemente convergenti. Condizione necessaria per la convergenza uniforme di una serie di funzioni. M -Test di Weierstrass. Condizione di Cauchy per la convergenza uniforme. L’utilizzo della stima d’errore di Leibniz per la dimostrazione della convergenza uniforme di una serie. Sviluppabilità di una funzione rispetto a una famiglia di funzioni base Φ . L’esempio delle serie di Fourier. Funzioni sviluppabili in serie di potenze di centro z_0 . Funzioni analitiche. Serie di potenze. Insieme di convergenza di una serie di potenze. Proprietà dell’insieme di convergenza di una serie di potenze. Convergenza uniforme nei dischi compatti strettamente contenuti nel disco di convergenza. Raggio di convergenza. Proprietà caratteristiche del raggio di convergenza. Continuità della serie di potenze. Integrazione a termine a termine di una serie di potenze. Derivazione a termine a termine di una serie di potenze. Serie di Taylor di una funzione di classe $C^\infty(I)$. Sviluppabilità di una

funzione in serie di potenze e polinomio di Taylor. Un esempio di funzione non sviluppabile in serie di potenze che ammette una serie di Taylor convergente. Un criterio di sviluppabilità. Esempi notevoli: esponenziale, funzioni circolari, funzioni iperboliche, l'arcotangente, il logaritmo, la serie binomiale, le funzioni arcoseno e arcocoseno. La formula di Eulero.

Spazi metrici e geometria di \mathbb{R}^N . Punti e vettori di \mathbb{R}^N . Prodotto scalare e norma in uno spazio vettoriale; loro proprietà. Esempi in \mathbb{R}^N e in $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Spazi di Hilbert e spazi di Banach. Disuguaglianza di Buniakowsky-Cauchy-Schwarz. Norma indotta da un prodotto scalare. Ortogonalità tra vettori. Nozione astratta di distanza in un insieme X . Distanza indotta da una norma. Le norme $\| \cdot \|_p$ in \mathbb{R}^N con $p = 1, 2, \infty$; la palla unitaria in \mathbb{R}^2 nelle rispettive norme. Distanza banale su un insieme non vuoto. La distanza euclidea in \mathbb{R}^N . Spazi di funzioni. La distanza del massimo d_∞ e le distanze integrali d_p nello spazio $C^0([a, b], \mathbb{R})$. Topologia in uno spazio metrico: palla-aperta di centro x_0 e raggio ρ , intorno di un punto, proprietà degli intorni, punti interni, interno di un insieme, punti isolati, insiemi aperti. Una palla-aperta è un insieme aperto. Punti di accumulazione, chiusura di un insieme, insiemi chiusi. Punti di frontiera, frontiera di un insieme. Un insieme è chiuso se e solo se il complementare è aperto. Insiemi limitati in uno spazio metrico. Diametro di un insieme. Insiemi densi. Proprietà degli aperti e dei chiusi. Densità di \mathbb{Q}^2 in \mathbb{R}^2 . Rette e curve di \mathbb{R}^2 : equazione cartesiana, equazione parametrica, come grafico di una funzione. Curva in \mathbb{R}^N . Piani e superfici di \mathbb{R}^3 ; equazione cartesiana, equazione parametrica, come grafico di una funzione. Insiemi, linee e superfici di livello di un campo scalare. Funzioni tra spazi metrici. Successioni in uno spazio metrico. Limiti di una successione. Teorema sui limiti delle componenti di una successione a valori vettoriali. Equazione parametrica dell'ellisse e dell'ellissoide. Coordinate polari ed ellittiche nel piano e sferiche ed ellissoidali nello spazio. Limiti di funzioni tra spazi metrici. Funzioni continue. Funzioni uniformemente continue. La norma è una funzione continua rispetto alla metrica indotta. Caratterizzazione del limite di una funzione usando i limiti delle successioni. Campi scalari e campi vettoriali. Limite di un campo vettoriale. Limite infinito o a infinito di un campo vettoriale. Esempi: l'integrale come funzione continua tra $C^0([a, b], \mathbb{R})$ (con la distanza d_∞) e \mathbb{R} ; la derivazione non è continua tra $C^1([a, b], \mathbb{R})$ (con la distanza d_∞) e $C^0([a, b], \mathbb{R})$ (con la distanza d_∞). Successioni di funzioni in distanza d_∞ e convergenza uniforme. Teorema sul limite delle funzioni composte; teorema sul limite di una combinazione lineare; teorema sul limite della funzione prodotto. Teorema dell'unicità del limite. Teorema sul limite della restrizione. Tecniche per controllare la non esistenza del limite per \mathbf{x} che tende a \mathbf{x}^0 di una funzione. Insiemi compatti (per successioni). Esempi di insiemi chiusi e limitati non compatti. Gli insiemi compatti sono chiusi e limitati. Caratterizzazione degli insiemi compatti di \mathbb{R}^N . Teorema di compattezza per funzioni tra spazi metrici. Teorema di Weierstrass per funzioni definite su uno spazio metrico. Teorema della continuità uniforme (Heine-Cantor) per funzioni tra spazi metrici. Insiemi connessi per archi. Teorema di connessione. Teorema di esistenza degli zeri.

Applicazioni lineari. Matrice associata a un'applicazione lineare. Una funzione lineare tra spazi euclidei è continua. Esempio di una funzione lineare tra spazi di Banach non-continua.

Calcolo differenziale in \mathbb{R}^N . Derivate direzionali e derivate parziali. L'esistenza delle derivate direzionali non implica la continuità. Il calcolo delle derivate parziali. Funzioni differenziabili. Differenziale. Approssimante lineare. Interpretazione geometrica della differenziabilità per un campo scalare di \mathbb{R}^2 : piano tangente. Continuità di una funzione differenziabile. Esistenza e formula per il calcolo delle derivate direzionali di una funzione differenziabile. Matrice Jacobiana. Gradiente di un campo scalare. Teoremi di differenziabilità della combinazione lineare e del prodotto (solo enunciati). Teorema di differenziabilità della funzione composta. Derivate parziali delle funzioni composte (chain rule). Il caso particolare in cui la funzione composta è reale di variabile reale. Teorema del differenziale totale. Esempio di funzione differenziabile con derivate non continue. Vettore tangente di una curva. Linee coordinate sulla superficie (meridiani e paralleli della sfera). Piano tangente. Ortogonalità tra un vettore e una curva in \mathbb{R}^2 e tra una superficie parametrizzata e un vettore in \mathbb{R}^3 . Teorema del differenziale totale. Esempio di funzione differenziabile con derivate non continue. Proprietà geometriche del vettore gradiente: ortogonalità tra il gradiente di un campo scalare di \mathbb{R}^2 e le sue curve di livello, ortogonalità tra il gradiente di un campo scalare di \mathbb{R}^3 e le sue superfici di livello; direzione di massimo incremento di un campo scalare di \mathbb{R}^N . Un esempio: soluzioni dell'equazione $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Formula del valor medio per i campi scalari. La formula non vale per i campi vettoriali. Funzioni con derivate nulle sugli aperti connessi per archi (dimostrazione su aperti connessi per archi derivabili). Calcolo del differenziale di funzioni definite con il prodotto scalare: $\varphi(x) = \langle x, w \rangle$ con $w \in \mathbb{R}^N$ vettore fissato, $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$, $\varphi(x) = \|x\|^2$, $\varphi(x) = \|x\|$, $\varphi(x) = \langle Ax, v \rangle$ e $\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle$ (forma quadratica) con A matrice quadrata, $f(x, y) = \langle \varphi(x, y), \psi(x, y) \rangle$ con $\varphi, \psi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$. Derivate direzionali e derivate parziali di ordine k . Esempio in cui le derivate miste non sono uguali. Teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione (solo enunciato). Forme bilineari, forme quadratiche e matrice associata. Funzioni due volte differenziabili in un punto. Matrice Hessiana di un campo scalare. Teorema di Young (solo enunciato) sulla simmetria della matrice Hessiana. Differenziale secondo di una funzione in un punto. Derivate direzionali seconde di una funzione due volte differenziabile e loro rappresentazione mediante la matrice Hessiana. Condizione sufficiente per la due volte differenziabilità di una funzione in un punto. Approssimante di ordine n di una funzione in un punto. Teorema di esistenza dell'approssimante di ordine 2 di una funzione due volte differenziabile in un punto (polinomio di Taylor). Punti di minimo/massimo assoluto e relativo e punti di sella. Punti critici. Test del gradiente (teorema di Fermat). Un punto di sella in \mathbb{R}^2 per una funzione differenziabile è un punto critico. Segnatura di una forma quadratica: forme quadratiche definite positive, definite negative, indefinite. Proprietà delle forme quadratiche definite positive (o negative). Test del differenziale secondo per la classificazione dei punti

critici. Criterio (dei minori di nord ovest) per stabilire la segnatura di una forma quadratica generata da una matrice simmetrica di ordine N . Problemi di massimo e minimo vincolato. Vincoli in \mathbb{R}^N . Vincoli espliciti e vincoli impliciti in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Il teorema della funzione implicita in dimensione 2 (teorema di U. Dini). Derivabilità della funzione implicita. Derivata seconda della funzione implicita. Esempio di studio di una funzione implicitamente definita. Teorema di parametrizzabilità locale di una curva piana. Teorema del moltiplicatore di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato a una curva in \mathbb{R}^2 . Esempio: distanza di una retta da un punto. Cenni ai teoremi della funzione implicita nel caso di una funzione $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (superficie in \mathbb{R}^3) e nel caso di una funzione $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (curva in \mathbb{R}^3). Parametrizzabilità locale di una superficie di \mathbb{R}^3 e di una curva in \mathbb{R}^3 . Il teorema del moltiplicatore di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato ad una superficie in \mathbb{R}^3 (cenni). Esempio: distanza di una superficie da un punto. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato ad una curva in \mathbb{R}^3 (solo enunciato). Integrali dipendenti da un parametro. Continuità e derivabilità della funzione $f(x) = \int_a^b g(t, x) dt$. Derivata di una funzione del tipo $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t, x) dt$.

Calcolo integrale in \mathbb{R}^N . N -Rettangoli e decomposizioni di \mathbb{R}^N . Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori e loro proprietà. Integrale inferiore e integrale superiore. Funzioni integrabili secondo Riemann su un N -rettangolo. Interpretazione geometrica dell'integrale di una funzione non-negativa in \mathbb{R}^2 . Proprietà fondamentali dell'integrale: linearità dell'integrale e integrabilità del prodotto (solo enunciati), monotonia dell'integrale (con il caso particolare delle funzioni continue), integrabilità della restrizione e additività dell'integrale (solo enunciati), integrabilità del valore assoluto (solo enunciato), teorema della media integrale. Teorema di integrabilità delle funzioni continue sui rettangoli. Teorema di riduzione (di Fubini) per integrali doppi sui rettangoli (solo enunciato). Esempio in cui non vale il teorema di Fubini. Teorema di riduzione (di Fubini) per integrali tripli sui 3-rettangoli di \mathbb{R}^3 (solo enunciato): formule di riduzione per corde e per sezioni. Integrale di una funzione limitata su un insieme limitato. La definizione non dipende dal rettangolo. Insiemi misurabili e misura di Peano-Jordan in \mathbb{R}^N . Esempi di insiemi non misurabili. Insiemi di misura nulla (trascurabili). Plurirettangoli. Teorema di caratterizzazione degli insiemi di misura nulla. Teorema di caratterizzazione degli insiemi misurabili mediante la frontiera. Una funzione integrabile (su un rettangolo) di \mathbb{R}^N ha grafico di misura nulla in \mathbb{R}^{N+1} . Proprietà fondamentali dell'integrale su un insieme limitato: linearità, prodotto, valore assoluto, monotonia (solo enunciati). Il teorema di integrabilità della restrizione. Il teorema di additività. Il teorema della media integrale. Proprietà della misura (positività, monotonia, additività, invarianza per traslazioni). Integrabilità delle funzioni limitate sugli insiemi di misura nulla. Proprietà verificate quasi ovunque. Integrabilità delle funzioni limitate e continue quasi ovunque su un insieme misurabile. Domini di \mathbb{R}^2 normali rispetto a un asse e loro misurabilità. Integrali su domini normali di \mathbb{R}^2 . Domini di \mathbb{R}^3 normali rispetto a un piano.

Superfici cilindriche. Misurabilità dei domini normali di \mathbb{R}^3 . Integrali su domini normali di \mathbb{R}^3 (riduzione per corde). Sezione di un insieme di \mathbb{R}^3 . Insiemi sezionabili di \mathbb{R}^3 . Integrali su insiemi sezionabili di \mathbb{R}^3 (riduzione per sezioni). Il volume del cono. Il volume del toro. Sostituzione di variabili negli integrali multipli. La formula in dimensione 1. La formula in dimensione $N > 1$ (solo enunciata). Giustificazione informale della presenza nella formula dell'“elemento d'area” o dell'“elemento di volume”: l'area di un parallelogramma, il volume di un parallelepipedo e il determinante della matrice associata.