

Università di Trieste – Facoltà d’Ingegneria.

Corsi di laurea ingegneria civile e ambientale e ingegneria dell’informazione

Corso di Analisi Matematica 2 (IN01 e IN02)

Anno Accademico 2014/2015

*Prof. Franco Obersnel*

**Spazi metrici e geometria di  $\mathbb{R}^N$ .** Nozione astratta di distanza in un insieme  $X$ . Spazi metrici. Esempi. La distanza euclidea in  $\mathbb{R}^N$ . Diverse metriche in  $\mathbb{R}^N$ . Spazi di funzioni. La distanza del massimo  $d_\infty$  e le distanze integrali  $d_p$  nello spazio  $C^0([a, b])$ . Topologia in uno spazio metrico: palla-aperta di centro  $x_0$  e raggio  $\rho$ , intorni di un punto, proprietà degli intorni, punti interni, interno di un insieme, punti isolati, insiemi aperti. Una palla aperta è un insieme aperto. Punti di accumulazione, chiusura di un insieme, insiemi chiusi, punti di frontiera. Un insieme  $E$  è chiuso se e solo se è unione dell’insieme dei punti interni di  $E$  e della sua frontiera. Un insieme è chiuso se e solo se il complementare è aperto. Proprietà degli aperti e dei chiusi. Insiemi densi. Densità di  $\mathbb{Q}^2$  in  $\mathbb{R}^2$ . Insiemi limitati in uno spazio metrico. Diametro di un insieme. Punti e vettori di  $\mathbb{R}^N$ . Prodotto scalare e norma in uno spazio vettoriale; loro proprietà. Esempi in  $\mathbb{R}^N$  e in  $C^0([a, b])$ . Disuguaglianza di Buniakowsky-Cauchy-Schwarz. Dimostrazione della disuguaglianza triangolare per la distanza euclidea in  $\mathbb{R}^N$ . Ortogonalità tra vettori. Coseno dell’angolo tra vettori. Campi scalari e campi vettoriali. Rappresentazioni grafiche dei campi scalari, delle curve e dei campi vettoriali. Insiemi, linee e superfici di livello di un campo scalare. Rette e curve di  $\mathbb{R}^2$ ; equazione cartesiana in forma implicita ed esplicita, equazione parametrica. Equazione parametrica di un segmento congiungente due punti. Cenno alle coniche in  $\mathbb{R}^2$ . Forme quadratiche di  $\mathbb{R}^2$ . Piani e superfici di  $\mathbb{R}^3$ ; equazione cartesiana in forma implicita ed esplicita, equazione parametrica. Superficie parametrica in  $\mathbb{R}^3$ . Equazione parametrica della sfera. Coordinate sferiche nello spazio. Superfici quadriche. Forma quadratica di  $\mathbb{R}^3$ . Classificazione delle quadriche (cenni): ellissoidi, iperboloidi, paraboloidi, coni, cilindri.

**Funzioni tra spazi metrici.** Funzioni tra spazi metrici. Funzioni continue. Limiti. Successioni in uno spazio metrico. Componenti di una funzione a valori vettoriali. Teorema sul limite delle funzioni componenti. Teorema dell’unicità del limite. Teorema sul limite della restrizione. Tecniche per controllare la non esistenza del limite per  $\mathbf{x}$  che tende a  $\mathbf{x}^0$  di una funzione. Teorema sul limite delle funzioni composte. Teorema sul limite di una combinazione lineare. Teorema sul limite della funzione prodotto. Insiemi compatti per successioni. Caratterizzazione degli insiemi compatti per successioni di  $\mathbb{R}^N$ . Esempi di insiemi chiusi e limitati non compatti nello spazio  $\mathbb{Q}$  e nello spazio  $C^0([0, 1])$ . Teorema di compattezza per funzioni tra spazi metrici. Teorema di Weierstrass per funzioni definite su uno spazio metrico. Funzioni uniformemente continue. Teorema della continuità uniforme (Heine) per funzioni tra spazi metrici (solo enunciato). Insiemi connessi per archi. Teorema di connessione. Teorema di esistenza degli zeri. Teorema della permanenza del segno.

**Serie numeriche e serie di funzioni.** Il concetto di somma infinita. Serie di numeri reali. Carattere di una serie. Termine generale di una serie. Ridotta  $n$ -esima di una serie. Serie convergente, divergente, indeterminata. Serie geometrica di ragione  $x \in \mathbb{R}$ . Condizione necessaria (non sufficiente) per la convergenza di una serie. Il carattere di una serie non viene modificato modificando un numero finito di termini. Serie somma di due serie. Le serie come particolari integrali generalizzati. Carattere della serie armonica e della serie armonica generalizzata. Serie a termini positivi. Aut aut per le serie a termini di segno costante. Criteri del confronto e dell'ordine di infinitesimo. Criteri del rapporto e della radice per le serie a termini positivi. Se per una serie è applicabile il criterio del rapporto, allora il termine generale della serie è un infinitesimo soprareale. Serie a termini di segno misto. Serie assolutamente convergenti e serie semplicemente convergenti. Una serie assolutamente convergente è convergente. L'esempio della serie di Leibniz. Criterio di convergenza di Leibniz per le serie a termini di segno alterno. Stima della somma di una serie a termini di segno alterno. Legame tra la convergenza di una successione di numeri complessi e la convergenza delle successioni delle parti reale e immaginaria. Serie di numeri complessi e loro convergenza. Serie delle parti reale e immaginaria. Serie geometrica di ragione complessa. Serie assolutamente convergenti. Una serie assolutamente convergente è convergente. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale (non viceversa). Convergenza in distanza  $d_\infty$ . Proprietà del limite uniforme: teorema dei due limiti, teorema di continuità del limite uniforme, teorema di integrabilità (dimostrazione sotto l'ulteriore ipotesi di continuità), teorema sulla derivata del limite. Serie di funzioni. Serie puntualmente e uniformemente convergenti. Serie totalmente convergenti. M-test di Weierstrass (convergenza totale e convergenza uniforme). L'utilizzo della stima d'errore di Leibniz per la dimostrazione della convergenza uniforme di una serie. Il problema della sviluppabilità. L'esempio delle serie di Fourier. Funzioni sviluppabili in serie di potenze di centro  $x_0$ . Serie di potenze. Insieme di convergenza di una serie di potenze. Proprietà dell'insieme di convergenza di una serie di potenze. Raggio di convergenza. Convergenza uniforme nei compatti. Continuità della serie di potenze. Integrazione a termine a termine di una serie di potenze. Derivazione a termine a termine di una serie di potenze. Funzioni analitiche. Coefficienti della serie di una funzione analitica. Serie di Taylor di una funzione di classe  $C^\infty(I)$ . Un esempio di funzione non sviluppabile in serie di potenze che ammette una serie di Taylor convergente. Sviluppabilità di una funzione in serie di potenze e polinomio di Taylor. Un criterio di sviluppabilità. Esempi notevoli: esponenziale, funzioni circolari, funzioni iperboliche, l'arcotangente, il logaritmo, la serie binomiale (senza dimostrazione della sviluppabilità). Calcolo della somma di una serie usando manipolazioni della serie geometrica. Serie di potenze in  $\mathbb{C}$ . La funzione  $e^z$  in  $\mathbb{C}$  e la formula di Eulero.

**Calcolo differenziale in  $\mathbb{R}^N$ .** Derivate direzionali e derivate parziali. L'esistenza delle derivate direzionali non implica la continuità. Il calcolo delle derivate parziali. Applicazioni lineari. Matrice associata ad un'applicazione

lineare. Il teorema di rappresentazione di Riesz per le forme lineari di  $\mathbb{R}^N$ . Funzioni differenziabili. Differenziale. Approssimante lineare. Continuità di una funzione differenziabile. Esistenza delle derivate direzionali. Derivata direzionale di una funzione differenziabile. Matrice Jacobiana. Gradiente di un campo scalare. Interpretazione geometrica della differenziabilità per un campo scalare di  $\mathbb{R}^2$ : piano tangente. Teorema del differenziale totale. Teoremi di differenziabilità della combinazione lineare e del prodotto (solo enunciati). Teorema di differenziabilità della funzione composta. Derivate parziali delle funzioni composte (chain rule). Il caso particolare in cui la funzione composta è reale di variabile reale. Vettore tangente di una curva. Ortogonalità tra un vettore e una curva in un punto della curva. Proprietà geometriche del vettore gradiente: ortogonalità tra il gradiente di un campo e i suoi insiemi di livello, direzione di massimo incremento. Un esempio: soluzioni dell'equazione  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ . Calcolo di  $\nabla(\|x\|)$ ,  $\nabla(\|x\|^2)$ ,  $\nabla(\langle Ax, x \rangle)$  con  $A$  matrice  $N \times N$ . Il calcolo del gradiente di una funzione del tipo  $\langle h(x), v \rangle$ . Formula del valor medio per i campi scalari. La formula non vale per i campi vettoriali. Funzioni con derivate nulle sugli aperti connessi per archi (dimostrazione per archi derivabili). Derivate direzionali e derivate parziali di ordine  $k$ . Esempio in cui le derivate miste non sono uguali. Teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione (solo enunciato). Funzioni due volte differenziabili in un punto. Matrice Hessiana di un campo scalare. Teorema di Young (solo enunciato) sulla simmetria della matrice Hessiana. Differenziale secondo di una funzione in un punto. Teorema di esistenza dell'approssimante di ordine 2 di una funzione in un punto (polinomio di Taylor). Derivate direzionali seconde di una funzione due volte differenziabile e loro rappresentazione mediante la matrice Hessiana. Punti estremali per una funzione. Punti di minimo/massimo relativo e punti di sella. Punti critici. Test del gradiente (teorema di Fermat). Un punto di sella in  $\mathbb{R}^2$  è un punto critico. Segnatura di una forma quadratica: forme quadratiche definite positive, definite negative, indefinite. Proprietà delle forme quadratiche definite positive (o negative). Test del differenziale secondo per la classificazione dei punti critici. Criterio (di Jacobi-Sylvester) per stabilire la segnatura di una forma quadratica generata da una matrice simmetrica di ordine  $N$ . Vincoli in  $\mathbb{R}^N$ . Vincoli espliciti e vincoli impliciti in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Problemi di massimo e minimo vincolato. Il teorema della funzione implicita in dimensione 2 (teorema di U. Dini). Derivabilità della funzione implicita. Derivata seconda della funzione implicita. Curve regolari. Teorema di parametrizzabilità locale di una curva. Teorema del moltiplicatore di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato ad una curva in  $\mathbb{R}^2$ . Superfici parametrizzate in  $\mathbb{R}^3$ . Il teorema della funzione implicita nel caso di una funzione  $g : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (solo enunciato). Parametrizzabilità locale di una superficie di  $\mathbb{R}^3$ . Linee coordinate sulla superficie (meridiani e paralleli della sfera). Superficie regolare, piano tangente, vettore e versore normale. Ortogonalità del gradiente di un campo scalare di  $\mathbb{R}^3$  con le sue superfici di livello. Esempio del grafico di un campo scalare di  $\mathbb{R}^2$ . Il metodo del moltiplicatore di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato ad una superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Il metodo dei multipli-

catori di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato ad una curva in  $\mathbb{R}^3$  (solo enunciato). Integrali dipendenti da un parametro. Continuità e derivabilità della funzione  $f(x) = \int_a^b g(t, x) dt$ . Derivata di una funzione del tipo  $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t, x) dt$ .

**Calcolo integrale in  $\mathbb{R}^N$ .**  $N$ -Rettangoli e decomposizioni di  $\mathbb{R}^N$ . Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori e loro proprietà. Funzioni integrabili secondo Riemann su un  $N$ -rettangolo. Interpretazione geometrica dell'integrale di una funzione non-negativa in  $\mathbb{R}^2$ . Proprietà fondamentali dell'integrale (solo enunciato): integrabilità della somma e linearità dell'integrale, integrabilità del prodotto, monotonia dell'integrale, integrabilità della parte positiva e della parte negativa, integrabilità del valore assoluto, integrabilità della restrizione, additività dell'integrale. Teorema della media integrale. Teorema di integrabilità delle funzioni continue sui rettangoli. Teorema di riduzione (di Fubini) per integrali doppi sui rettangoli (solo enunciato). Teorema di riduzione (di Fubini) per integrali tripli sui 3-rettangoli di  $\mathbb{R}^3$  (solo enunciato): formule di riduzione per corde e per sezioni. Funzione caratteristica  $\chi_E$ . Insiemi misurabili e misura di Peano-Jordan in  $\mathbb{R}^N$ . Esempio di un insieme non misurabile. Proprietà della misura: misura di un rettangolo, positività, monotonia e additività. Insiemi di misura nulla. Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla. Teorema di caratterizzazione degli insiemi misurabili mediante la frontiera. Proprietà verificate quasi ovunque. Misura del grafico di una funzione integrabile. Integrabilità delle funzioni limitate e continue quasi ovunque su un rettangolo. Definizione di integrale di una funzione limitata su un insieme limitato. Integrabilità delle funzioni sugli insiemi di misura nulla. Integrabilità delle funzioni limitate e continue quasi ovunque su un insieme misurabile. Insiemi di  $\mathbb{R}^2$  normali rispetto ad un asse e insiemi di  $\mathbb{R}^3$  normali rispetto ad un piano. Integrali su insiemi normali di  $\mathbb{R}^2$ . Teorema di riduzione per corde su insiemi normali di  $\mathbb{R}^3$ . Sezione di un insieme di  $\mathbb{R}^3$ . Insiemi sezionabili di  $\mathbb{R}^3$ . Teorema di riduzione per sezioni su insiemi sezionabili di  $\mathbb{R}^3$ . Sostituzione di variabili negli integrali multipli. Le trasformazioni lineari, l'area di un parallelogramma ed il determinante della matrice associata; giustificazione informale della formula del cambio di variabili. Teorema del cambio di variabili negli integrali multipli (solo enunciato). Integrazione in coordinate polari ed ellittiche. Integrazione in coordinate sferiche ed ellissoidali. Il volume del cono. Applicazioni geometriche e fisiche: volume e massa di solidi in  $\mathbb{R}^3$ , centro di massa, momenti di inerzia. Il volume del toro. Solidi di rotazione. Il teorema di Pappo-Guldino per i volumi. Integrali generalizzati in  $\mathbb{R}^N$ . Famiglie invadenti di un insieme adatte ad una funzione. Funzioni localmente integrabili su un insieme. Il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f|_{A_n} dm$  non dipende dalla famiglia invadente se  $f$  è di segno costante (solo enunciato). Funzioni integrabili in senso generalizzato e integrale generalizzato di una funzione localmente integrabile. Il calcolo dell'integrale di Gauß  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} dx$ . Integrabilità della funzione  $f(x, y) = \frac{1}{\|(x, y)^T\|^\alpha}$ . Criteri di integrabilità in senso generalizzato utilizzando l'ordine di infinitesimo o l'ordine di infinito (cenni).

**Integrali di linea e di superficie.** Curve di  $\mathbb{R}^N$ : curve equivalenti, orientazione di curve equivalenti, curve semplici, chiuse, regolari. Il sostegno identifica una curva regolare semplice non chiusa (solo enunciato). Teorema della curva di Jordan (solo enunciato). L'esempio della curva di Peano. Curve continue rettificabili. Lunghezza di una curva. Una disuguaglianza sulla norma dell'integrale. Curve continue rettificabili. Teorema sulla rettificabilità di una curva di classe  $C^1$ . Formula della lunghezza per una curva di classe  $C^1$  (solo enunciato). La lunghezza di una curva non dipende dalla particolare parametrizzazione. Ascissa curvilinea e parametrizzazione in lunghezza d'arco. Il vettore tangente nella parametrizzazione d'arco è unitario. Integrale di linea di un campo scalare. Massa, baricentro e momenti di inerzia di un filo. Curve ottenute dai grafici di funzioni reali di variabile reale. Curve in forma polare. Formula della lunghezza per una curva in rappresentazione polare. Superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$ . Area di una superficie parametrizzata. Integrale di superficie di un campo scalare. Massa, baricentro e momenti di inerzia di una superficie. Superficie che ha per sostegno il grafico di una funzione reale di due variabili reali. Area laterale di una superficie cilindrica e significato geometrico dell'integrale di linea su una curva piana. Superficie di rotazione. Il teorema di Pappo-Guldino per le aree. Integrali di linea e campi vettoriali. Integrale di linea della componente tangenziale di un campo vettoriale lungo una curva. Interpretazione fisica: lavoro di un campo vettoriale lungo una curva. Indipendenza dalla parametrizzazione a meno del segno. Campi conservativi. Il potenziale di un campo. L'integrale di linea di un campo conservativo. Teorema di caratterizzazione dei campi conservativi. Rotore di un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  e in  $\mathbb{R}^2$ . Campi irrotazionali. Rotore di un campo conservativo differenziabile. Un esempio di un campo irrotazionale non conservativo. Insiemi stellati. Il lemma di Poincaré sulla caratterizzazione dei campi conservativi in un aperto stellato. Versore normale di una curva di  $\mathbb{R}^2$ . Integrale di linea della componente normale di un campo vettoriale lungo una curva di  $\mathbb{R}^2$ ; interpretazione come flusso di un campo vettoriale di  $\mathbb{R}^2$  attraverso una curva. Integrale di superficie della componente normale di un campo attraverso una superficie di  $\mathbb{R}^3$ ; interpretazione come flusso di un campo vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  attraverso una superficie. Domini regolari con bordo orientato positivamente in  $\mathbb{R}^2$  e in  $\mathbb{R}^3$ . Operatori differenziali: il gradiente, il rotore, la divergenza, il Laplaciano. Il teorema della divergenza di Gauss in  $\mathbb{R}^2$  (dimostrazione per i domini normali rispetto ad entrambi gli assi). Il teorema della divergenza di Gauss in  $\mathbb{R}^3$  (solo enunciato). Interpretazione fisica della divergenza. La formula di Green (teorema del rotore in  $\mathbb{R}^2$ ). Il teorema di (Kelvin) Stokes in  $\mathbb{R}^3$  (solo enunciato). Interpretazione fisica del rotore. Il lemma di Poincaré rivisto alla luce del teorema di Stokes. Campi solenoidali, campi a divergenza nulla, potenziale vettore. Applicazione della formula di Green al calcolo dell'area di una regione piana racchiusa da una curva. Alcune formule di integrazione per parti:
$$\iiint_K \langle \nabla f, g \rangle dx dy dz = \iint_{\partial K} f \langle g, n \rangle d\sigma - \iiint_K f \operatorname{div} g dx dy dz; \text{ se } f = h = 0 \text{ su } \partial\Omega \text{ allora } \iiint_{\Omega} f \Delta h dx dy dz = \iiint_{\Omega} h \Delta f dx dy dz.$$

**Equazioni differenziali.** Definizioni e generalità. Alcuni modelli: dina-

mica di una popolazione, i modelli di Malthus, Gompertz, Verhulst; modelli con difficoltà di accoppiamento, con prelievo; caduta di un grave nel vuoto e nell'aria; l'equazione della molla; l'equazione delle onde, l'equazione del calore, l'equazione di Laplace. Unicità della soluzione del problema di Dirichlet  $\Delta u = 0, u|_{\partial\Omega} = 0$ . Equazione della curvatura media prescritta. Equazioni ordinarie ed equazioni alle derivate parziali. Ordine di un'equazione. Equazioni autonome, equazioni in forma normale. Equazioni lineari. Problema di Cauchy. Definizione di soluzione di un'equazione differenziale ordinaria e di un problema di Cauchy. Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Esempio di non esistenza, di non unicità, di esistenza non globale della soluzione di un problema di Cauchy. Equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine: esistenza e unicità della soluzione globale, formula risolutiva della soluzione del problema di Cauchy. Teorema di Peano di esistenza della soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine (solo enunciato). Funzioni Lipschitziane. Teorema di esistenza e unicità locale della soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine (Cauchy - Lipschitz - Lindelöf - Picard). Teorema di esistenza globale della soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine. Equazioni a variabili separate. Equazioni riconducibili ad un'equazione a variabili separate mediante sostituzione della variabile. Equazione lineari del primo ordine; l'equazione omogenea e l'equazione completa, l'operatore differenziale  $L : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ , lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea, l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare completa. Metodo della variazione della costante per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa del primo ordine. Equazioni di Bernoulli. Problema linearizzato. Equazioni differenziali ordinarie e problema di Cauchy di ordine  $N$ . Teoremi di esistenza e unicità per le equazioni di ordine  $N$  (cenni). Equazioni del secondo ordine del tipo  $y'' = f(x, y')$  e  $y'' = f(y)$ . Legge di conservazione dell'energia meccanica. Esempio di studio di un'equazione di tipo  $y'' = f(y)$  nel piano delle fasi: l'equazione del pendolo. Equazioni differenziali ordinarie lineari di ordine  $N$ : l'equazione omogenea e l'equazione completa, l'operatore differenziale  $L : C^N(I) \rightarrow C^0(I)$ , lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea, l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare completa. Wronskiano di  $N$  funzioni. Lemma sull'annullamento del Wronskiano di  $n$  soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria lineare di ordine  $N$ . Metodo della variazione delle costanti per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa di ordine  $N$  (dimostrazione per  $N = 2$ ). Nucleo risolvente. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti di ordine  $N$ . Determinazione di una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea. Metodo di somiglianza per la determinazione di una soluzione particolare per equazioni lineari a coefficienti costanti in caso di termini noti di tipo polinomiale, esponenziale, trigonometrico. Principio di sovrapposizione. Sistemi di equazioni differenziali. Sistemi lineari. Esempio di risoluzione di un sistema lineare piano mediante riduzione ad un'equazione del secondo ordine. Legge di conservazione dell'energia meccanica per un sistema del tipo  $\gamma'' = f(\gamma)$ . Legame tra un'equazione scalare di ordine  $N$  e il sistema del primo ordine di dimensione  $N$  corrispondente. Matrice compagna. Un esempio

di dinamica delle popolazioni con due variabili: il modello di Lotka-Volterra. Equazioni di Eulero.

**Testi consigliati** P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di analisi matematica 2 (per il diploma universitario)*, Università degli Studi di Trieste, Facoltà di Ingegneria. (Chiedere al docente). V. Barutello, M. Conti. D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, *Analisi matematica (con elementi di geometria e calcolo vettoriale)* Volume 2, Apogeo.

**Testi di esercizi** P. Omari e M. Trombetta, Temi svolti di analisi matematica II (sono i compiti d'esame assegnati nei corsi dell'Università di Trieste negli anni 2001-2004), Ed. Goliardiche Trieste. S. Salsa, A. Squellaci, *Esercizi di matematica (calcolo infinitesimale e algebra lineare, calcolo infinitesimale, due volumi)*, Zanichelli.

Alla pagina <http://www.dmi.units.it/~obersnel> potete trovare ulteriori informazioni sul corso, tutti gli esercizi assegnati a lezione, esercizi svolti, compiti assegnati agli esami.