Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Corsi di laurea ingegneria industriale e navale

Corso di Analisi Matematica 2 (041 IN)
Anno Accademico 2011/2012
Dott. Franco Obersnel

Spazi metrici e spazi euclidei. Nozione astratta di distanza in un insieme X. Spazi metrici. Esempi. La distanza euclidea in $\mathbb{R}^N$. Diverse metriche in $\mathbb{R}^N$. Spazi di funzioni. La distanza del massimo d_∞ e le distanze integrali d_p nello spazio $C^0([a,b])$. Topologia in uno spazio metrico: palla-aperta di centro x_0 e raggio ρ, intorni di un punto, proprietà degli intorni, punti interni, interno di un insieme, punti isolati, insiemi aperti. Una palla aperta è un insieme aperto. Punti di accumulazione, chiusura di un insieme, insiemi chiusi, punti di frontiera. Un insieme è chiuso se e solo se il complementare è aperto. Proprietà degli aperti e dei chiusi. Insiemi densi. Densità di $\mathbb{Q}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Insiemi limitati in uno spazio metrico. Diametro di un insieme. Funzioni tra spazi metrici. Successioni in uno spazio metrico. Limiti. Funzioni continue. Componenti di una funzione a valori vettoriali. Teorema sul limite delle funzioni componenti. Teorema sulle componenti del limite di una successione a valori vettoriali. Rappresentazioni grafiche dei campi scalari e dei campi vettoriali. Insiemi, linee e superfici di livello di un campo scalare. Punti e vettori di $\mathbb{R}^N$. Prodotto scalare e norma in uno spazio vettoriale; loro proprietà. Esempi in $\mathbb{R}^N$ e in $C^0([a,b])$. Disuguaglianza di Buniakowsky-Cauchy-Schwarz. Ortogonalità tra vettori. Coseno dell'angolo tra vettori. Dimostrazione della disuguaglianza triangolare per la distanza euclidea in $\mathbb{R}^N$. Rette e curve di $\mathbb{R}^2$; equazione cartesiana in forma implicita ed esplicita, equazione parametrica. Coordinate polari nel piano. Equazione parametrica di un segmento congiungente due punti. Piani e superfici di $\mathbb{R}^3$; equazione cartesiana in forma implicita ed esplicita, equazione parametrica. Equazione parametrica della sfera. Coordinate sferiche nello spazio. Superfici quadriche. Forma quadratica di $\mathbb{R}^3$. Matrice quadrata simmetrica associata alla forma quadratica. Classificazione delle quadriche (cenni): ellissoidi, iperboloidi, paraboloidi, coni, cilindri. Teoremi sulle funzioni continue e sui limiti. Teorema di caratterizzazione dell'esistenza del limite di una funzione mediante l'esistenza del limite di successioni. Teorema dell'unicità del limite. Teorema sul limite della restrizione. Tecniche per controllare la non esistenza del limite per $\mathbf{x}$ che tende a $\mathbf{x^0}$ di una funzione. Teorema sul limite delle funzioni composte. Insiemi compatti per successioni. Caratterizzazione degli insiemi compatti per successioni di $\mathbb{R}^N$. Esempi di insiemi chiusi e limitati non compatti nello spazio $\mathbb{Q}$ e nello spazio $C^0([0,1])$. Teorema di compattezza (per successioni) per funzioni tra spazi metrici. Teorema di Weierstrass per funzioni definite su uno spazio metrico. Funzioni uniformemente continue. Teorema della continuità uniforme (Heine-Cantor) per funzioni tra spazi metrici. Insiemi connessi per archi. Teorema di connessione. Teorema di esistenza degli zeri. Teorema della permanenza del segno. Teorema della limitatezza locale. Teorema sul limite di una combinazione lineare. Teorema sul limite della funzione prodotto e della funzione reciproca. Applicazioni lineari. Matrice associata ad un'applicazione lineare. Il teorema di rappresentazione di Riesz per le forme lineari di $\mathbb{R}^N$.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$. Derivate direzionali e derivate parziali. Funzioni derivabili. La derivabilità non implica la continuità. Funzioni differenziabili. Differenziale. Approssimante lineare. Continuità e derivabilità delle funzioni differenziabili. Derivata direzionale di una funzione differenziabile. Matrice Jacobiana. Gradiente di un campo scalare. Interpretazione geometrica della differenziabilità per un campo scalare di $\mathbb{R}^2$, piano tangente. Determinante jacobiano delle funzioni che descrivono il cambio di variabili in coordinate polari e sferiche. Prima proprietà geometrica del vettore gradiente: la direzione di massimo incremento. Teorema del differenziale totale. Teoremi di differenziabilità della combinazione lineare e del prodotto (solo enunciato). Teorema di differenziabilità della funzione composta. Derivate parziali delle funzioni composte. Il caso particolare in cui la funzione composta è reale di variabile reale. Vettore tangente di una curva piana. Ortogonalità tra un vettore e una curva in un punto della curva. Seconda proprietà geometrica del vettore gradiente: ortogonalità tra il gradiente di un campo su $\mathbb{R}^2$ e i suoi insiemi di livello. Un esempio: soluzioni dell'equazione $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Calcolo di $\nabla(\|x\|)$, $\nabla(\|x\|^2)$, $\nabla(\langle Ax,x\rangle)$ con A matrice $N\times N$. Formula del valor medio per i campi scalari. La formula non vale per i campi vettoriali. Funzioni con derivate nulle sugli aperti connessi per archi. Derivate direzionali e derivate parziali di ordine k. Esempio in cui le derivate miste non sono uguali. Teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione. Forme quadratiche e matrice associata. Segnatura di una forma quadratica: forme quadratiche definite positive, definite negative, indefinite. Criterio (di Jacobi-Sylvester) per stabilire la segnatura di una forma quadratica generata da una matrice simmetrica di ordine 2 e 3. Funzioni due volte differenziabili in un punto. Matrice Hessiana di un campo scalare. Teorema di Young (solo enunciato) sulla simmetria della matrice Hessiana. Differenziale secondo di una funzione in un punto. Derivate direzionali seconde di una funzione due volte differenziabile e loro rappresentazione mediante la matrice Hessiana. Teorema di esistenza dell'approssimante di ordine 2 di una funzione in un punto (polinomio di Taylor). Punti estremali per una funzione. Punti di minimo/massimo relativo e punti di sella. Punti critici. Test del gradiente (teorema di Fermat). Un punto di sella in $\mathbb{R}^2$ è un punto critico. Test del differenziale secondo per la classificazione dei punti critici. Vincoli in $\mathbb{R}^N$. Vincoli espliciti e vincoli impliciti in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Problemi di massimo e minimo vincolato. Curve parametrizzate in $\mathbb{R}^N$. Parametrizzazione e sostegno di una curva. Curve equivalenti. Orientazione di curve equivalenti. Curve semplici, chiuse, regolari. Teorema della curva di Jordan (solo enunciato). Vettore tangente. Equazione della retta tangente una curva regolare in un punto. Curve rappresentate con equazione cartesiana in $\mathbb{R}^2$. Il teorema della funzione implicita in dimensione 2 (teorema di U. Dini). Derivabilità della funzione implicita. Derivata seconda della funzione implicita. Parametrizzabilità locale di una curva. Teorema del moltiplicatore di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato ad una curva in $\mathbb{R}^2$. Superfici parametrizzate in $\mathbb{R}^3$. Sostegno di una superficie. Superfici equivalenti. Orientazione di superfici equivalenti. Superfici semplici. Superfici cilindriche. Linee coordinate sulla superficie (meridiani e paralleli della sfera). Superficie regolare, piano tangente, vettore normale. Il teorema della funzione implicita nel caso di una funzione $g : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (solo enunciato). Parametrizzabilità locale di una superficie di $\mathbb{R}^3$. Il metodo del moltiplicatore di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato ad una superficie in $\mathbb{R}^3$. Parametrizzabilità locale di una curva di $\mathbb{R}^3$ (solo enunciato). Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato ad una curva in $\mathbb{R}^3$. Integrali dipendenti da un parametro. Continuità e derivabilità della funzione $g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$. Derivata di una funzione del tipo $g(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx$.

Serie di funzioni e serie di potenze. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale (non viceversa). Convergenza in distanza d_∞. Proprietà del limite uniforme: teorema dei due limiti, teorema di continuità, teorema di integrabilità (dimostrazione sotto l'ulteriore ipotesi di continuità), teorema di derivabilità. Serie di funzioni. Serie puntualmente e uniformemente convergenti. M-test di Weierstrass (serie totalmente convergenti). Il problema della sviluppabilità. Funzioni sviluppabili in serie di potenze di centro x_0 e funzioni sviluppabili in serie di Fourier. Serie di potenze. Insieme di convergenza di una serie di potenze. Proprietà dell'insieme di convergenza di una serie di potenze. Raggio di convergenza. Convergenza totale nei compatti. Continuità e integrazione a termine a termine di una serie di potenze. Derivazione a termine a termine di una serie di potenze. Funzioni analitiche. Coefficienti della serie di una funzione analitica. Serie di Taylor di una funzione di classe $C^\infty(I)$. Un esempio di funzione non sviluppabile in serie di potenze che ammette una serie di Taylor convergente. Sviluppabilità di una funzione e polinomio di Taylor. Criteri di sviluppabilità. Esempi notevoli: esponenziale, funzioni circolari, funzioni iperboliche, l'arcotangente, il logaritmo, la serie binomiale, le funzioni circolari inverse. Calcolo della somma di una serie usando manipolazioni della serie geometrica. Successioni e serie a termini complessi. Raggio di convergenza di una serie di potenze complesse. Funzioni di variabile complessa. Derivata di una funzione complessa. Funzioni olomorfe, funzioni analitiche. La funzione e^z in $\mathbb{C}$. La formula di Eulero.

Calcolo integrale in $\mathbb{R}^N$. $N-$Rettangoli e decomposizioni di $\mathbb{R}^N$. Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori e loro proprietà. Funzioni integrabili secondo Riemann su un $N-$rettangolo. Interpretazione geometrica dell'integrale di una funzione non-negativa in $\mathbb{R}^2$. Proprietà fondamentali dell'integrale: integrabilità della somma e linearità dell'integrale, integrabilità del prodotto (solo enunciato), monotonia dell'integrale (solo enunciato), integrabilità della parte positiva e della parte negativa, integrabilità del valore assoluto, integrabilità della restrizione (solo enunciato), additività dell'integrale (solo enunciato), teorema della media integrale. Teorema di integrabilità delle funzione continue sui rettangoli. Teorema di riduzione (di Fubini) per integrali doppi sui rettangoli. Teorema di riduzione (di Fubini) per integrali tripli sui $3-$rettangoli di $\mathbb{R}^3$ (solo enunciato): formule di riduzione per corde e per sezioni. Integrale di una funzione limitata su un insieme limitato. L'integrale su R della funzione f_R^* associata ad $f : E \to \mathbb{R}$ non dipende dal rettangolo R che contiene l'insieme E. Insiemi misurabili e misura di Peano-Jordan. Proprietà della misura: misura di un rettangolo, positività, monotonia e additività. Esempio di un insieme non misurabile. Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla (dimostrazione solo nel caso $N = 2$). Una funzione integrabile ha grafico di misura nulla (cenni di dimostrazione). Teorema di caratterizzazione degli insiemi misurabili mediante la frontiera (cenni di dimostrazione). Integrabilità delle funzioni sugli insiemi di misura nulla. Integrabilità delle funzioni limitate e continue su un insieme misurabile. Domini di $\mathbb{R}^2$ normali rispetto ad un asse e insiemi di $\mathbb{R}^3$ normali rispetto ad un piano. Integrali su domini normali di $\mathbb{R}^2$. Teorema di riduzione per corde su insiemi normali di $\mathbb{R}^3$. Sezione di un insieme di $\mathbb{R}^3$. Insiemi sezionabili di $\mathbb{R}^3$. Teorema di riduzione per sezioni su insiemi sezionabili di $\mathbb{R}^3$. Il volume del cono. Sostituzione di variabili negli integrali multipli. Le trasformazioni lineari, l'area di un parallelogramma ed il determinante della matrice associata; giustificazione informale della formula del cambio di variabili. Teorema del cambio di variabili negli integrali multipli (solo enunciato). Integrazione in coordinate polari e ellittiche. Integrazione in coordinate sferiche e ellissoidali. Applicazioni geometriche e fisiche: volume e massa di solidi in $\mathbb{R}^3$, centro di massa, momenti di inerzia. Volume del toro. Solidi di rotazione. Il teorema di Pappo-Guldino per i volumi. Integrali generalizzati in $\mathbb{R}^N$. Insiemi localmente misurabili. Famiglie invadenti di un insieme. Funzioni localmente integrabili su un insieme. Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{A_n} f|_{A_n}\,dm$ non dipende dalla famiglia invadente se f è di segno costante (solo enunciato). Funzioni integrabili in senso generalizzato e integrale generalizzato di una funzione localmente integrabile definita su un insieme localmente misurabile di $\mathbb{R}^N$. Il calcolo dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$.

Integrali di linea e di superficie. Una disuguaglianza sulla norma dell'integrale. Curve continue rettificabili. Teorema sulla rettificabilità di una curva di classe C^1. Formula della lunghezza per una curva di classe C^1 (solo enunciato). La lunghezza di una curva non dipende dalla particolare parametrizzazione. Ascissa curvilinea e parametrizzazione in lunghezza d'arco. Il vettore tangente nella parametrizzazione d'arco è unitario. Integrale di linea di un campo scalare. Massa, baricentro e momenti di inerzia di un filo. Curve ottenute dai grafici di funzioni reali di variabile reale. Curve in forma polare. Formula della lunghezza per una curva in rappresentazione polare. Area di una superficie parametrizzata. L'area di una superficie non dipende dalla particolare parametrizzazione (solo enunciato). Integrale di superficie di un campo scalare. Superficie che ha per sostegno il grafico di una funzione reale di due variabili reali. Area laterale di una superficie cilindrica e significato geometrico dell'integrale di linea su una curva piana. Superficie di rotazione. Il teorema di Pappo-Guldino per le aree. Integrali di linea e campi vettoriali. Integrale di linea della componente tangenziale di un campo vettoriale lungo una curva. Interpretazione fisica: lavoro di un campo vettoriale lungo una curva. Indipendenza dalla parametrizzazione a meno del segno. Circuitazione di un campo. Campi conservativi. Il potenziale di un campo. L'integrale di linea di un campo conservativo. Rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathbb{R}^2$. Campi irrotazionali. Rotore di un campo conservativo differenziabile. Un esempio di un campo irrotazionale non conservativo. Teorema di caratterizzazione dei campi conservativi. Teorema di conservazione dell'energia meccanica. Insiemi stellati. Il lemma di Poincaré sulla caratterizzazione dei campi conservativi in un aperto stellato. Divergenza di un campo in $\mathbb{R}^N$. Laplaciano di un campo scalare di $\mathbb{R}^N$. Campi solenoidali. Versore normale di una curva di $\mathbb{R}^2$. Integrale di linea della componente normale di un campo vettoriale lungo una curva di $\mathbb{R}^2$; interpretazione come flusso di un campo vettoriale di $\mathbb{R}^2$ attraverso una curva. Integrale di superficie della componente normale di un campo attraverso una superficie di $\mathbb{R}^3$; interpretazione come flusso di un campo vettoriale di $\mathbb{R}^3$ attraverso una superficie. Domini regolari in $\mathbb{R}^2$. Versore normale esterno di un dominio regolare. Il teorema della divergenza di Gauss in $\mathbb{R}^2$ (dimostrazione per i domini normali rispetto ad entrambi gli assi). La formula di Green e il teorema del rotore (di Stokes) in $\mathbb{R}^2$. Il teorema di (Kelvin) Stokes in $\mathbb{R}^3$. Il lemma di Poincaré rivisto alla luce del teorema di Stokes. Applicazione della formula di Green al calcolo dell'area di una regione piana racchiusa da una curva. Il teorema della divergenza di Gauss in $\mathbb{R}^3$. Interpretazione fisica di divergenza e rotore. Alcune formule di integrazione per parti: $\iiint_K \langle \nabla f, g\rangle \, dxdydz = \iint_{\partial K} f \langle g, n\rangle \, d\sigma - \iiint_K f \, \mathrm{div} g \, dxdydz$; se $f = h = 0$ su $\partial\Omega$ allora $\iiint_\Omega f \triangle h \, dxdydz = \iiint_\Omega h \triangle f \, dxdydz$.

Equazioni differenziali. Definizioni e generalità. Alcuni modelli: dinamica di una popolazione, il modello di Malthus e il modello di Verhulst, difficoltà di accoppiamento, modelli con prelievo; caduta di un grave nel vuoto e nell'aria; l'equazione della molla; l'equazione delle onde, l'equazione del calore. Equazioni ordinarie ed equazioni alle derivate parziali. Ordine di un'equazione. Equazioni autonome, equazioni in forma normale. Equazioni lineari. Equazioni lineari omogenee. Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Definizione di soluzione di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Formula risolutiva per le equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine. Problema di Cauchy. Soluzione di un problema di Cauchy. Soluzione del problema di Cauchy associato ad un'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine. Esempio di esistenza non globale di una soluzione. Esempio di mancata unicità della soluzione di un problema di Cauchy. Esempio di mancata esistenza della soluzione di un problema di Cauchy. Sei problemi fondamentali nello studio di un'equazione. Teorema di Peano di esistenza della soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine (solo enunciato). Funzioni (localmente) Lipschitziane. Teorema di esistenza e unicità locale della soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine (Cauchy - Lipschitz - Lindelöf - Picard). Teorema di esistenza globale della soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine (cenni di dimostrazione). Equazioni a variabili separate. Equazioni riconducibili ad un'equazione a variabili separate mediante sostituzione della variabile. Equazioni di Bernoulli. Le equazione lineari del primo ordine da un punto di vista astratto: l'equazione omogenea e l' equazione completa, l'operatore differenziale $L : C^1(I) \to C^0(I)$, lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea, l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare completa. Metodo della variazione della costante per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa del primo ordine. Problema linearizzato. Equazioni differenziali ordinarie e problema di Cauchy di ordine N. Equazioni del secondo ordine del tipo $y'' = f(y)$ e $y'' = f(x, y')$. Teoremi di esistenza e unicità per le equazioni di ordine N (cenni). Equazioni differenziali ordinarie lineari di ordine N: l'equazione omogenea e l' equazione completa, l'operatore differenziale $L : C^N(I) \to C^0(I)$, lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea, l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare completa. Metodo della variazione delle costanti per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa di ordine N (dimostrazione nel caso $N = 2$). Wronskiano di N funzioni. Nucleo risolvente. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti di ordine N. Determinazione di una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea. Metodo di somiglianza per la determinazione di una soluzione particolare per equazioni lineari a coefficienti costanti in caso di termini noti di tipo polinomiale, esponenziale, trigonometrico. Equazioni di Eulero. Sistemi di equazioni differenziali. Sistemi lineari. Legame tra un'equazione scalare di ordine N e il sistema del primo ordine di dimensione N corrispondente. Matrice compagna. Un esempio di dinamica delle popolazioni con due variabili: il modello di Lotka-Volterra (cenni). Esempio di risoluzione di un sistema lineare piano mediante riduzione ad un'equazione del secondo ordine.

Testi consigliati P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di analisi matematica 2 (per il diploma universitario)*, Università degli Studi di Trieste, Facoltà di Ingegneria. (Chiedere al docente). V. Barutello, M. Conti. D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, *Analisi matematica (con elementi di geometria e calcolo vettoriale)* Volume 2, Apogeo. M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica 2*, Zanichelli.