Università di Tieste – Facoltà d'Ingegneria.

Lauree in ingegneria industriale presso la sede di Pordenone

Corso di Analisi Matematica 2
Anno Accademico 2009/2010

Dott. Franco Obersnel

Serie di funzioni e serie di potenze. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale (non viceversa). Limite uniforme di una successione di funzioni continue, integrabili, derivabili. Serie di funzioni. Serie puntualmente e uniformemente convergenti. Serie totalmente convergenti. La convergenza totale implica la convergenza uniforme. Il problema della sviluppabilità. Funzioni sviluppabili in serie di potenze di centro x_0 e funzioni sviluppabili in serie di Fourier. Serie di potenze. Insieme di convergenza di una serie di potenze. Proprietà dell'insieme di convergenza di una serie di potenze. Raggio di convergenza. Derivazione e integrazione a termine a termine di una serie di potenze. Calcolo della somma di una serie usando manipolazioni della serie geometrica. Funzioni analitiche. Coefficienti della serie di una funzione analitica. Serie di Taylor di una funzione di classe $C^\infty(I)$. Un esempio di funzione non sviluppabile in serie di potenze che ammette una serie di Taylor convergente. Teorema di sviluppabilità (condizione necessaria e sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor di una funzione). Criteri di sviluppabilità. Esempi notevoli: esponenziale, funzioni circolari, funzioni iperboliche, serie binomiale, logaritmo, funzioni circolari inverse. Determinazione numerica di $\log(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}^+$ usando la funzione omografica $y = \frac{1+x}{1-x}$. Esponenziale complesso e formula di Eulero.

Spazi metrici e spazi euclidei. Punti e vettori di $\mathbb{R}^N$. Prodotto scalare e norma in $\mathbb{R}^N$ e loro principali proprietà. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Rette e curve di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$; equazione cartesiana in forma implicita ed esplicita, equazione parametrica. Equazione parametrica di un segmento congiungente due punti. Piani e superfici di $\mathbb{R}^3$; equazione cartesiana in forma implicita ed esplicita, equazione parametrica. Equazione parametrica della sfera.

Nozione astratta di distanza. Spazi metrici. Esempi. La distanza euclidea in $\mathbb{R}^N$. Diverse metriche in $\mathbb{R}^N$. Spazi di funzioni. La distanza del sup e le distanze integrali (scarto medio e scarto quadratico medio) nello spazio $C([a,b])$. Topologia in uno spazio metrico: palla aperta di centro x_0 e raggio ρ, intorni di un punto, punti interni, punti isolati, insiemi aperti, insiemi chiusi, punti di accumulazione, chiusura di un insieme, punti di frontiera. Limite di una successione in uno spazio metrico. Funzioni tra spazi metrici. Funzioni continue. Componenti di una funzione a valori vettoriali. Teorema sul limite delle funzioni componenti. Insiemi limitati in uno spazio metrico. Insiemi compatti per successioni. Caratterizzazione degli insiemi compatti per successioni di $\mathbb{R}^N$. Esempi di insiemi chiusi e limitati non compatti in uno spazio metrico. Insiemi connessi per archi. Teorema dell'unicità del limite. Teorema sul limite della restrizione. Tecniche per controllare la non esistenza del limite per $\mathbf{x}$ che tende a $\mathbf{x^0}$ di una funzione. Teorema di limitatezza locale. Teorema sul limite di una combinazione lineare. Teorema sul limite delle funzioni composte. Teorema di compattezza (per successioni). Teorema di Weierstrass. Teorema di connessione. Teorema della permanenza del segno. Teorema sul limite della funzione prodotto e della funzione reciproca. Rappresentazioni grafiche dei campi scalari. e dei campi vettoriali. Insiemi, linee e superfici di livello di un campo scalare.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$. Derivate direzionali e derivate parziali. Funzioni derivabili. La derivabilità non implica la continuità. Approssimante lineare. Funzioni differenziabili. Differenziale. La matrice associata al differenziale rispetto alla base canonica. Continuità e derivabilità delle funzioni differenziabili. Derivata direzionale di una funzione differenziabile. Gradiente di un campo scalare. Matrice Jacobiana di un campo vettoriale. Determinante Jacobiano. Coordinate polari e coordinate sferiche. Interpretazione geometrica della differenziabilità per un campo scalare di $\mathbb{R}^2$, piano tangente. Teorema del differenziale totale. Teorema di differenziabilità della combinazione lineare, del prodotto, della funzione composta. Derivate parziali delle funzioni composte. Il caso particolare in cui la funzione composta è reale di variabile reale. Proprietà geometriche del vettore gradiente. Direzione di massima rapidità di variazione. Ortogonalità con gli insiemi di livello. Formula del valor medio per i campi scalari. Funzioni con derivate nulle sugli aperti connessi per archi. Forme quadratiche e matrice associata. Forme quadratiche definite positive, definite negative, indefinite. Derivate direzionali e derivate parziali successive. Matrice Hessiana di un campo scalare.

Funzioni due volte differenziabili in un punto. Differenziale secondo di una funzione in un punto. Il differenziale secondo come forma quadratica associata alla matrice Hessiana. Derivate direzionali seconde di una funzione due volte differenziabile. Teoremi di Young (solo enunciato) e di Schwarz (con dimostrazione) sull'inversione dell'ordine di derivazione. Teorema di esistenza dell'approssimante di ordine 2 di una funzione in un punto (polinomio di Taylor). Punti estremali per una funzione. Punti di minimo/massimo relativi e punti di sella. Punti critici. Test del gradiente (teorema di Fermat). Test del differenziale secondo per la classificazione dei punti critici. Criterio (di Jacobi-Sylvester) per stabilire la segnatura di una forma quadratica generata da una matrice simmetrica di ordine 2 e 3. Vincoli in $\mathbb{R}^N$. Vincoli espliciti e vincoli impliciti in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Problemi di massimo e minimo vincolato.

Curve di $\mathbb{R}^N$ e superfici di $\mathbb{R}^3$; parte prima. Curve parametrizzate in $\mathbb{R}^N$. Parametrizzazione e sostegno di una curva. Curve equivalenti. Orientazione di curve equivalenti. Curve semplici, chiuse, regolari. Vettore tangente. Equazione della retta tangente una curva regolare in un punto. Curve rappresentate con equazione cartesiana in $\mathbb{R}^2$. Il teorema della funzione implicita in dimensione 2. Parametrizzabilità locale di una curva. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato: caso della curva in $\mathbb{R}^2$. Superfici parametrizzate in $\mathbb{R}^3$. Parametrizzazione e sostegno di una superficie. Superfici equivalenti. Il nastro di Möbius come esempio di superficie non orientabile. Linee coordinate sulla superficie (meridiani e paralleli della sfera). Superficie regolare, piano tangente, vettore normale. Superfici rappresentate di forma cartesiana. Parametrizzabilità locale di una superficie. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato: caso della superficie in $\mathbb{R}^3$. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato: caso della curva in $\mathbb{R}^3$.

Calcolo integrale in $\mathbb{R}^N$. $N-$Rettangoli e decomposizioni di $\mathbb{R}^N$. Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori e loro proprietà. Funzioni integrabili secondo Riemann su un rettangolo. Interpretazione geometrica dell'integrale in $\mathbb{R}^2$. Proprietà fondamentali dell'integrale: integrabilità della somma e linearità dell'integrale, integrabilità del prodotto, monotonia dell'integrale, integrabilità del valore assoluto, integrabilità della restrizione, additività dell'integrale, teorema della media integrale. Funzione caratteristica χ_E. Insiemi misurabili e misura di un insieme. Esempio di un insieme non misurabile. Teoremi di riduzione (di Fubini) per integrali doppi sui rettangoli (con dimostrazione) e per integrali tripli sui $3-$rettangoli di $\mathbb{R}^3$ (solo enunciati): formule di riduzione per corde e per sezioni. Teorema di integrabilità delle funzione continue sui rettangoli. Integrali su insiemi limitati. L'integrale su R della funzione f_R^* associata ad $f : E \to \mathbb{R}$ non dipende dal rettangolo R che contiene l'insieme E. Insiemi misurabili. Insiemi trascurabili. I grafici delle funzioni integrabili sono trascurabili. Teorema di caratterizzazione degli insiemi misurabili. Integrabilità delle funzioni limitate quasi ovunque continue su un rettangolo. Integrabilità delle funzioni limitate quasi ovunque continue su un insieme misurabile. Insiemi di $\mathbb{R}^2$ normali rispetto ad un asse e insiemi di $\mathbb{R}^3$ normali rispetto ad un piano. Integrali su insiemi normali di $\mathbb{R}^2$. Teorema di riduzione per corde su insiemi normali di $\mathbb{R}^3$. Sezione di un insieme di $\mathbb{R}^3$. Insiemi sezionabili di $\mathbb{R}^3$. Teorema di riduzione per sezioni su insiemi sezionabili di $\mathbb{R}^3$. Il volume del cono. Applicazioni geometriche e fisiche: volume e massa di solidi in $\mathbb{R}^3$, centro di massa, momenti di inerzia. Sostituzione di variabili negli integrali multipli. Teorema del cambio di variabili negli integrali multipli (solo enunciato). Le trasformazioni lineari, l'area di un parallelogramma ed il determinante della matrice associata; giustificazione informale della formula del cambio di variabili. Integrazione in coordinate polari. Integrazione in coordinate sferiche. Coordinate ellittiche in $\mathbb{R}^2$ ed ellissoidali in $\mathbb{R}^3$. Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$. Il cono, il cilindro, la sfera, l'ellissoide, il toro. Solidi di rotazione. Il teorema di Pappo-Guldino per i volumi. Integrali generalizzati in $\mathbb{R}^N$. Insiemi localmente misurabili. Famiglie invadenti di un insieme. Integrale generalizzato di Riemann di una funzione definita su un insieme di $\mathbb{R}^N$. Il calcolo dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$.

Curve di $\mathbb{R}^N$ e superfici di $\mathbb{R}^3$; parte seconda. Integrale di funzioni vettoriali. Il teorema sulla norma dell'integrale (solo enunciato). Curve continue rettificabili. Teorema sulla rettificabilità di una curva di classe C^1. La lunghezza di una curva non dipende dalla particolare parametrizzazione. Ascissa curvilinea. Il vettore tangente nella parametrizzazione d'arco è unitario. Integrale di linea di un campo scalare. Massa, baricentro e momento di inerzia di un filo. Curve in forma polare, rappresentazione polare. Formula della lunghezza per una curva in rappresentazione polare. Area di una superficie parametrizzata. Integrale di superficie di un campo scalare. Superficie che ha per sostegno il grafico di una funzione reale di due variabili reali. Superficie cilindrica e significato geometrico dell'integrale di linea su una curva piana. Superficie di rotazione. Il teorema di Pappo-Guldino per le aree.

Campi vettoriali. Integrali di linea e campi vettoriali. Lavoro di un campo vettoriale lungo una curva. Indipendenza dalla parametrizzazione equivalente che conserva il verso. Campi conservativi. Il potenziale di un campo. Teorema di caratterizzazione dei campi conservativi. Il rotore di un campo in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathbb{R}^2$. Insiemi semplicemente connessi. Il lemma di Poincaré. Campi irrotazionali. La formula di Gauss-Green. Applicazione al calcolo delle aree. Flusso di un campo vettoriale di $\mathbb{R}^2$ attraverso una curva e di un campo di $\mathbb{R}^3$ attraverso una superficie. Divergenza di un campo vettoriale di $\mathbb{R}^N$. Il teorema della divergenza di Gauss in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$. Il teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$. Gradiente, divergenza e rotore come operatori differenziali. Il laplaciano. Interpretazione fisica di divergenza e rotore. Leggi espresse in forma integrale e in forma differenziale.

Equazioni differenziali. Motivazioni, esempi e generalità. Dinamica di una popolazione. Il modello di Malthus e il modello di Verhulst. Equazioni ordinarie ed equazioni alle derivate parziali. Ordine di un'equazione, equazioni autonome, equazioni in forma normale. ODE del primo ordine. Soluzione di un'ODE. Problema di Cauchy. Alcuni problemi fondamentali nello studio di un'equazione: esistenza, unicità, dipendenza continua, stabilità. Teorema di Peano di esistenza della soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine (solo enunciato). Funzioni Lipschitziane. Teorema di esistenza e unicità locale della soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine (con dimostrazione). Equazioni a variabili separate. Equazioni riconducibili ad un'equazione a variabili separate mediante sostituzione della variabile. ODE lineari di ordine 1. Equazione omogenea ed equazione completa. L'operatore differenziale $L : C^1(I) \to C^0(I)$. Lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea. Insieme delle soluzioni dell'equazione lineare completa. Procedimento per la risoluzione di un problema lineare. Metodo della variazione della costante per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa del primo ordine. Formula risolutiva per le equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine. Principio di sovrapposizione. Equazioni di Bernoulli. Problema linearizzato. Cenno ai sistemi lineari. ODE e problema di Cauchy di ordine n. Legame tra un'equazione scalare di ordine n e il sistema del primo ordine di dimensione n corrispondente. Equazioni lineari di ordine n. L'operatore differenziale $L : C^n(I) \to C^0(I)$. Lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea. Insieme delle soluzioni dell'equazione lineare completa. Metodo della variazione delle costanti per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa di ordine n. Matrice Wronskiana. ODE lineari a coefficienti costanti di ordine n. Determinazione di una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea. Metodo di somiglianza per la determinazione di una soluzione particolare per equazioni lineari a coefficienti costanti in caso di particolari termini noti. Equazioni del secondo ordine del tipo $y'' = f(y)$ e $y'' = f(x, y')$. Risoluzioni di sistemi lineari mediante derivazione. Equazioni di Eulero.

Testi consigliati P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di analisi matematica 2 (per il diploma universitario)*, Università degli Studi di Trieste, Facoltà di Ingegneria. (Chiedere al docente). V. Barutello, M. Conti. D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, *Analisi matematica (con elementi di geometria e calcolo vettoriale)* Volume 2, Apogeo. M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica 2*, Zanichelli.

Presso la segreteria sono disponibili fogli di esercizi sugli argomenti trattati e i testi degli esami precedenti. Alla pagina http://www.dmi.units.it/˜obersnel potete trovare ulteriori informazioni sul corso, tutti gli esercizi assegnati a lezione, esercizi svolti, compiti assegnati agli esami.