Università di Tieste – Facoltà d'Ingegneria.

Lauree in ingegneria industriale presso la sede di Pordenone

Corso di Analisi Matematica 2
Anno Accademico 2004/2005

Dott. Franco Obersnel

Serie numeriche. Il concetto di somma infinita. Serie di numeri reali. Carattere di una serie. Termine generale di una serie. Ridotta n-esima di una serie. Serie convergente, divergente, indeterminata. Serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$. Condizione necessaria (non sufficiente) per la convergenza di una serie. Il carattere di una serie non viene modificato modificando un numero finito di termini. Serie somma di due serie. Le serie come particolari integrali generalizzati. Serie armonica e serie armonica generalizzata. Serie a termini positivi. Aut aut per le serie a termini di segno costante. Criteri del confronto, dell'ordine di infinitesimo, del rapporto, della radice per le serie a termini positivi. Se per una serie è applicabile il criterio del rapporto, allora il termine generale della serie è un infinitesimo soprareale. Serie a termini di segno misto. Serie assolutamente convergenti e serie semplicemente convergenti. Una serie assolutamente convergente è convergente. L'esempio della serie di Leibniz. Criterio di convergenza di Leibniz per le serie a termini di segno alterno. Successioni di numeri complessi. Limite di una successione di numeri complessi. Intorni di un numero complesso. Legame tra la convergenza di una successione di numeri complessi e la convergenza delle successioni delle parti reale e immaginaria. Serie di numeri complessi e sua convergenza. Serie delle parti reale e immaginaria. Serie geometrica di ragione complessa. Serie assolutamente convergenti. Una serie assolutamente convergente è convergente.

Serie di funzioni e serie di potenze. Successioni e serie di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale (non viceversa). La continuità passa al limite nella convergenza uniforme. Il problema della sviluppabilità. Funzioni sviluppabili in serie di potenze di centro x_0 e funzioni sviluppabili in serie di Fourier. Funzioni analitiche.

Serie di potenze. Insieme di convergenza di una serie di potenze. Proprietà dell'insieme di convergenza di una serie di potenze. Raggio di convergenza. Derivazione e integrazione a termine a termine di una serie di potenze. Serie di Taylor di una funzione di classe $C^\infty(I)$. Un esempio di funzione non sviluppabile in serie di potenze che ammette una serie di Taylor convergente. Sviluppabilità in serie di Taylor. Criteri di sviluppabilità. Esempi notevoli: esponenziale, funzioni circolari, funzioni iperboliche, serie binomiale, logaritmo, funzioni circolari inverse. Determinazione numerica di $\log(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}^+$ usando la funzione omografica $y = \frac{1+x}{1-x}$. Esponenziale complesso e formula di Eulero.

Geometria e topologia di $\mathbb{R}^N$. Punti e vettori di $\mathbb{R}^N$. Prodotto scalare. Rette e curve di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$; equazione cartesiana in forma implicita ed esplicita, equazione parametrica. Equazione parametrica di un segmento congiungente due punti. Piani e superfici di $\mathbb{R}^3$; equazione cartesiana in forma implicita ed esplicita, equazione parametrica.

Struttura metrica (distanza), norma di $\mathbb{R}^N$ e loro principali proprietà. Palla aperta di centro $\mathbf{x^0}$ e raggio ρ. Intorni di un punto in $\mathbb{R}^N$. Punti interni di un insieme. Punti isolati. Insiemi aperti e chiusi di $\mathbb{R}^N$. Punti di accumulazione. Chiusura di un insieme. Insiemi limitati e insiemi compatti di $\mathbb{R}^N$. Insiemi connessi per archi di $\mathbb{R}^N$.

Funzioni. Campi scalari e campi vettoriali. Componenti di una funzione a valori vettoriali. Dominio di una funzione. Rappresentazioni grafiche dei campi scalari e dei campi vettoriali. Insiemi, linee e superfici di livello di un campo scalare.

Limiti e funzioni continue $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Teorema dell'unicità del limite. Teorema sul limite della restrizione. Teorema di limitatezza locale. Teorema sul limite di una combinazione lineare. Teorema sul limite delle funzioni composte. Teorema sul limite delle funzioni componenti. Teorema di compattezza (solo enunciato). Teorema di Weierstrass. Teorema di connessione. Teorema della permanenza del segno. Teorema sul limite della funzione prodotto e della funzione reciproca. Tecniche per controllare la non esistenza del limite per $\mathbf{x}$ che tende a $\mathbf{x^0}$ di una funzione. Limiti infiniti di campi scalari. Derivate direzionali e derivate parziali. Gradiente di un campo scalare. Matrice Jacobiana di un campo vettoriale. Determinante Jacobiano. Trasformazione di coordinate. Coordinate polari e coordinate sferiche.

Calcolo integrale in $\mathbb{R}^N$. Rettangoli e decomposizioni di $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e in generale di $\mathbb{R}^N$. Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori e loro proprietà. Funzioni integrabili secondo Riemann su un rettangolo. Interpretazione geometrica dell'integrale in $\mathbb{R}^2$. Proprietà fondamentali dell'integrale: linearità dell'integrale, integrabilità del prodotto, monotonia dell'integrale, integrabilità del valore assoluto, integrabilità della restrizione, additività dell'integrale, teorema della media integrale.

Teoremi di riduzione (di Fubini) per integrali doppi sui rettangoli e per integrali tripli sui rettangoli di $\mathbb{R}^3$ (parallelepipedi): formule di riduzione per corde e per sezioni (solo enunciati). Integrali su insiemi limitati. La funzione f_R^* associata ad $f : E \to \mathbb{R}$ non dipende dal rettangolo R che contiene l'insieme E. Insiemi misurabili. Un esempio di insieme non misurabile. Insiemi di misura nulla. Alcuni esempi di insiemi di misura nulla. Un insieme limitato è misurabile se e solo se ha frontiera di misura nulla (solo enunciato). Una funzione limitata su un rettangolo R continua su $R \setminus N$ con N insieme di misura nulla è integrabile (solo enunciato). Una funzione limitata continua su un insieme misurabile è ivi integrabile. Insiemi di $\mathbb{R}^2$ normali rispetto ad un asse e insiemi di $\mathbb{R}^3$ normali rispetto ad un piano. Integrali su insiemi normali di $\mathbb{R}^2$. Teorema di riduzione per corde su insiemi normali di $\mathbb{R}^3$. Sezione di un insieme di $\mathbb{R}^3$. Insiemi sezionabili di $\mathbb{R}^3$. Teorema di riduzione per sezioni su insiemi sezionabili di $\mathbb{R}^3$. Il volume del cono.

Sostituzione di variabili negli integrali multipli. Teorema del cambio di variabili negli integrali doppi e tripli (solo enunciato). Le trasformazioni lineari, l'area di un parallelogramma ed il determinante della matrice associata; giustificazione informale della formula del cambio di variabili. Integrazione in coordinate polari. Integrazione in coordinate sferiche. Coordinate ellittiche in $\mathbb{R}^2$ ed ellissoidali in $\mathbb{R}^3$. Applicazioni geometriche e fisiche: volume e massa di solidi in $\mathbb{R}^3$, centro di massa, momenti di inerzia. Il cono, il cilindro, la sfera, l'ellissoide, il toro. Solidi di rotazione. Il teorema di Pappo-Guldino per i volumi.

Integrali generalizzati in $\mathbb{R}^N$. Insiemi localmente misurabili. Funzioni localmente integrabili. Famiglie invadenti di un insieme. Integrale generalizzato di Riemann di una funzione definita su un insieme localmente misurabile di $\mathbb{R}^N$. Il calcolo dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$. La derivabilità non implica la continuità. Funzioni differenziabili. Differenziale. Approssimante lineare. Continuità e derivabilità delle funzioni differenziabili. Derivata direzionale di una funzione differenziabile. Interpretazione geometrica della differenziabilità, piano tangente. Espressione del differenziale mediante le derivate parziali. La matrice Jacobiana come matrice associata al differenziale. Teorema del differenziale totale. Teorema di differenziabilità della combinazione lineare e del prodotto. Teorema di differenziabilità della funzione composta (solo enunciato). Derivate parziali delle funzioni composte. Il caso particolare in cui la funzione composta è reale di variabile reale. Formula del valor medio per i campi scalari. Funzioni a gradiente nullo sugli aperti connessi per archi. Derivate parziali successive. Matrice Hessiana. Teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione (solo enunciato).

Forme quadratiche e matrice associata. Segnatura di una forma quadratica. n-forme. Approssimante di ordine n di un campo scalare in un punto (polinomio di Taylor). Differenziale di ordine n. Funzioni n volte differenziabili in un punto. Il caso particolare di $n = 2$: il teorema di Young sulla simmetria della matrice Hessiana e l'espresione analitica del differenziale secondo.

Punti estremali per una funzione. Punti di minimo/massimo relativi e assoluti e punti di sella. Punti critici. Test della derivata prima (teorema di Fermat). Test del differenziale secondo. Criterio (di Jacobi-Sylvester) per stabilire la segnatura di una forma quadratica generata da una matrice simmetrica di ordine 2 e 3.

Problemi di massimo e minimo vincolato. Classificazione dei possibili tipi di vincolo in $\mathbb{R}^2$. Caso del vincolo esplicito: curva parametrizzata in $\mathbb{R}^2$.

Curve e superfici. Curva parametrizzata in $\mathbb{R}^N$. Parametrizzazione e sostegno di una curva. Curve equivalenti. Orientazione di curve equivalenti. Curve semplici, chiuse, regolari. Vettore e versore tangente. Equazione della retta tangente una curva regolare in un punto. Curve rappresentate in forma cartesiana. Il teorema della funzione implicita in dimensione 2. Parametrizzabilità locale di una curva. Proprietà geometriche del vettore gradiente. Direzione di massima rapidità di variazione. Ortogonalità con gli insiemi di livello. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione dei punti di estremo vincolato: caso della curva in $\mathbb{R}^2$. Superficie parametrizzata in $\mathbb{R}^3$. Superficie semplice. Superfici equivalenti. Il problema dell'orientazione. Il nastro di Möbius e l'esistenza di superfici non orientabili. Linee coordinate sulla superficie (linee u e linee v). Superficie regolare e piano tangente. Versore normale.

Poligonali. Curve continue rettificabili. Teorema sulla rettificabilità di una curva di classe C^1. Formula della lunghezza per curve di classe C^1 (solo enunciato). Curve ottenute dai grafici di funzioni reali di variabile reale. Curve in forma polare, rappresentazione polare. Formula della lunghezza per una curva in rappresentazione polare. La lunghezza di una curva non dipende dalla particolare parametrizzazione. Ascissa curvilinea. Il vettore tangente nella parametrizzazione d'arco è unitario. Integrale di linea di un campo scalare. Massa, baricentro e momento di inerzia di un filo.

Area di una superficie. Integrale di superficie di un campo scalare. Superficie che ha per sostegno il grafico di una funzione reale di due variabili reali. Superficie cilindrica e significato geometrico dell'integrale di linea su una curva piana. Superficie di rotazione. Il teorema di Pappo-Guldino per le aree.

Campi vettoriali. Integrale di un campo vettoriale. Lavoro di un campo vettoriale lungo una curva. Campi conservativi. Il potenziale di un campo. Teorema di caratterizzazione dei campi conservativi. Operatori differenziali. Il rotore di un campo in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathbb{R}^2$. Campi irrotazionali. Insiemi stellati. Lemma di Poincaré. Divergenza di un campo in $\mathbb{R}^N$. Campi solenoidali.

La generalizzazione a dimensioni superiori del teorema fondamentale del calcolo. Domini regolari di $\mathbb{R}^2$. Versore normale esterno di un dominio regolare. La formula di Gauss-Green in $\mathbb{R}^2$ e il teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$. Applicazione al calcolo delle aree. Flusso di un campo vettoriale di $\mathbb{R}^2$ attraverso una curva, e di un campo di $\mathbb{R}^3$ attraverso una superficie. Il teorema della divergenza di Gauss.

Equazioni differenziali. Definizioni e generalità. Dinamica di una popolazione. Equazioni ordinarie ed equazioni alle derivate parziali. Ordine di un'equazione. Equazioni lineari, omogenee, complete, autonome, in forma normale. Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Soluzione e integrale generale di un'equazione differenziale. Problema di Cauchy. Sei problemi fondamentali nello studio di un'equazione. Teorema di esistenza e unicità locale e globale della soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine (solo enunciato). Equazioni a variabili separabili. Equazioni riconducibili ad un'equazione a variabili separate mediante sostituzione della variabile. Equazioni differenziali e problema di Cauchy di ordine superiore al primo. Equazioni differenziali ordinarie lineari di ordine 1. Problema linearizzato. Equazione omogenea ed equazione completa. L'operatore differenziale $L : C^1(I) \to C^0(I)$. Lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea. Insieme delle soluzioni dell'equazione lineare completa. Procedimento per la risoluzione di un problema lineare. Metodo della variazione della costante per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa del primo ordine. Formula risolutiva per le equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine. Equazioni di Bernoulli. Linee integrali di un campo. Sistemi di equazioni differenziali. Un modello di propagazione delle epidemie. Equazione logistica. Circuiti elettrici RL e RLC. Equazioni differenziali ordinarie lineari di ordine n. Metodo della variazione delle costanti per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa di ordine n. Wronskiano di n funzioni. Nucleo risolvente. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti di ordine n. Determinazione di una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea. Metodo di somiglianza per la determinazione di una soluzione particolare per equazioni lineari a coefficienti costanti in caso di particolari termini noti. Principio di sovrapposizione. Legame tra un sistema lineare di n equazioni del primo ordine e un'equazione lineare scalare di ordine n. Sistemi lineari. Equazioni del secondo ordine del tipo $y'' = f(y)$. Equazioni di Eulero.

Argomenti relativi alla prima parte: serie numeriche, serie di funzioni e serie di potenze, geometria e topologia di $\mathbb{R}^N$, funzioni.

Argomenti relativi alla seconda parte: calcolo integrale in $\mathbb{R}^N$, calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$.

Argomenti relativi alla terza parte: curve e superficie, campi vettoriali, equazioni differenziali.

Testi consigliati

P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di analisi matematica 2 (per il diploma universitario)*, Università degli Studi di Trieste, Facoltà di Ingegneria. (Reperibile in rete).

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, *Matematica. Calcolo infinitesimale e algebra lineare.*, Zanichelli

Presso la segreteria sono disponibili fogli di esercizi sugli argomenti trattati e i testi degli esami precedenti. Alla pagina http://www.dmi.units.it/˜obersnel potete trovare ulteriori informazioni sul corso, tutti gli esercizi assegnati a lezione, esercizi svolti, compiti assegnati agli esami.