Università di Tieste – Facoltà d'Ingegneria.

Laurea in ingegneria industriale

Corso di Analisi Matematica 1
Anno Accademico 2008/2009

Dott. Franco Obersnel

Teoria degli insiemi. Cenni di logica. Proposizioni e predicati. Connettivi logici: congiunzione, disgiunzione, implicazione, negazione. Quantificatori e saturazione di una variabile. Dimostrazioni. Dimostrazione per assurdo. Nozione primitiva di insieme. Rappresentazione di un insieme. Appartenenza, inclusione. Uguaglianza di insiemi. Insieme vuoto. Insieme delle parti. Operazioni tra insiemi: intersezione, unione, differenza, differenza simmetrica, prodotto cartesiano. Diagrammi di Venn. Proprietà algebriche: associatività, commutatività, distributività. Insieme complementare. Leggi di De Morgan. Legame tra operazioni logiche e operazioni insiemistiche. Relazione binarie tra insiemi. Funzioni. Immagine e controimmagine. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Funzioni composte, funzioni inverse. Cenni sulla cardinalità di un insieme. Insiemi equipotenti. Cardinalità del numerabile $\aleph_0$. Equipotenza di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. $|\mathbb{R}| > \aleph_0$. Relazioni d'ordine. Minimo e massimo di un insieme ordinato. Unicità del minimo (massimo). Limitazioni superiori ed inferiori di un sottoinsieme di un insieme ordinato. Sottoinsiemi limitati e illimitati superiormente e inferiormente. Estremo superiore ed estremo inferiore di un sottoinsieme limitato in un insieme ordinato.

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Assiomi di campo. Alcune proprietà algebriche dei campi. Assiomi di campo ordinato. Esempi di campi finiti. Alcune proprietà dei campi ordinati. Irrazionalità della radice quadrata di 2. Alcuni sottoinsiemi di un campo ordinato: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Il numero come strumento di misura. La "retta razionale". Insufficienza dei numeri razionali. Insiemi separati e insiemi contigui. Elemento separatore. Unicità dell'elemento separatore tra insiemi contigui. Esempio di insiemi separati in $\mathbb{Q}$ che non hanno elemento separatore. Proprietà di continuità (assioma di Dedekind). Campi ordinati completi. $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo. $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato ma non è completo. Teorema di esistenza dell'estremo superiore (inferiore) in $\mathbb{R}$. Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore (inferiore) in $\mathbb{R}$. La proprietà di Archimede. Le notazioni $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$. Densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

I numeri naturali e il calcolo combinatorio. Proprietà fondamentali (assiomi di Peano). Il principio di induzione (formulazione insiemistica e formulazione logica). Esempi di definizioni per ricorrenza. Esempi di verifiche utilizzando il principio di induzione. La progressione aritmetica e la progressione geometrica. Calcolo combinatorio. Permutazioni di un insieme. Il fattoriale di n. Il numero delle possibili permutazioni di un insieme di n elementi. Il numero delle biiezioni $f : A \to B$ con $|A| = |B| = n$. Disposizioni e combinazioni di classe k di un insieme di n elementi. Il numero delle possibili disposizioni e combinazioni di classe k di un insieme di n elementi. Coefficienti binomiali e alcune loro proprietà. La formula di Stifel e il triangolo di Tartaglia. La formula del binomio di Newton. Il numero delle funzioni iniettive $f : A \to B$ con $|A| \leq |B|$. Funzioni caratteristiche di un insieme. Corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle parti di un insieme E e l'insieme delle funzioni $\{f : E \to \{0, 1\}\}$. Il numero delle funzioni $f : A \to B$. La cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme.

Funzioni elementari. Funzioni. Grafico di una funzione. Funzioni limitate e illimitate. Massimo, minimo, estremi superiore ed inferiore di una funzione. Funzioni monotone (strettamente crescenti/decrescenti, debolmente crescenti/decrescenti). Algebra delle funzioni reali. Funzioni pari e dispari. Le funzioni costanti. La funzione identica. La funzione valore assoluto. Equazioni e disequazioni con il valore assoluto. Proprietà del valore assoluto. Descrizione di un intervallo aperto di centro un punto mediante il valore assoluto. La funzione potenza di esponente naturale. Proprietà analitiche della funzione potenza di esponente naturale. Teorema di esistenza della radice ennesima. La funzione radice ennesima e le sue proprietà. Proprietà algebriche delle potenze di esponente naturale. Le potenze di esponente intero, razionale e reale e le loro proprietà analitiche e algebriche. La funzione esponenziale a^x, con $a > 0$, e le sue proprietà. La funzione logaritmo e sue proprietà. Funzioni periodiche, periodo, periodo minimo. Le funzioni parte intera e mantissa. La circonferenza. Misura di un angolo in radianti. Le funzioni circolari seno, coseno, tangente e le loro proprietà. Relazioni fondamentali tra funzioni circolari. Formule di addizione. Formule di prostaferesi. Funzioni circolari inverse e loro proprietà: arcoseno, arcocoseno, arcotangente. Combinazioni lineari in seno e coseno e riduzione alla forma $A\sin(\omega x+\varphi)$. Fenomeni oscillatori. Oscillazioni smorzate e oscillazioni forzate. Studio di grafici di funzioni ottenute mediante traslazioni, dilatazioni o composizione con il valore assoluto di una funzione nota. Le funzioni iperboliche $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$; loro proprietà e formule principali. Polinomi e funzioni razionali. Divisione tra polinomi. Polinomi riducibili e polinomi irriducibili. Zeri di un polinomio. Molteplicità di uno zero. Teorema di Cartesio-Ruffini. Principio di identità dei polinomi. Polinomio interpolante. Polinomi distinti corrispondono a funzioni polinomiali distinte. Rappresentazione in base B di un numero naturale. Rappresentazione decimale di un numero razionale e di un numero reale.

Successioni di numeri reali. Successioni di numeri reali. La successione di Fibonacci, la sezione aurea e la spirale logaritmica. Successioni limitate. Proprietà verificate definitivamente. Sottosuccessioni. Definizione di limite finito di una successione di numeri reali. Successioni convergenti. Successioni infinitesime. Teorema di unicità del limite. Una successione convergente è limitata. Limite delle sottosuccessioni ed un criterio per la non esistenza del limite di una successione. Successioni divergenti. Limite $+\infty$ o $-\infty$ di una successione di numeri reali. Successioni monotone. Teorema di esistenza del limite di una successione monotona. La successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Il numero e di Nepero. Il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Il teorema del confronto per i limiti di successioni. Il Teorema di Bolzano-Weierstrass (esistenza di una sottosuccessione convergente di una successione limitata). Successioni illimitate e sottosuccessioni divergenti. Successione delle medie aritmetiche dei termini di una successione convergente.

Topologia della retta. Palla aperta in $\mathbb{R}$. Intervalli aperti e chiusi, limitati e illimitati. Intorni di un numero reale, di $-\infty$ e di $+\infty$. Proprietà degli intorni. Punti di accumulazione di un insieme. Caratterizzazione dei punti di accumulazione con le successioni. Punti isolati di un insieme. Punti interni di un insieme. Insiemi aperti. Chiusura di un insieme. Insiemi chiusi. Insiemi compatti. Unioni finite di compatti sono compatte. Caratterizzazione dei compatti con le successioni. Una palla aperta è un insieme aperto. Un insieme compatto ha sempre massimo e minimo. Definizione di limite di una successione mediante la nozione di intorno.

Limiti di funzioni reali e funzioni continue. Limite per x che tende a x_0 di una funzione $f(x)$ (definizione con gli intorni). Definizioni esplicite nei casi $x_0\in\mathbb{R}$, $x_0=-\infty$, $x_0=+\infty$, limite finito, limite $-\infty$, limite $+\infty$. Caratterizzazione del limite di una funzione mediante le successioni. Teorema di unicità del limite. Funzioni discoste da zero. Proprietà verificate localmente in un punto. Toerema della limitatezza locale. Teorema della permanenza del segno per i limiti. Teorema sul limite della restrizione. Un criterio per stabilire la non esistenza del limite. Limiti destri e sinistri. Il limite esiste se e solo se esistono e sono uguali limite destro e sinistro. Limiti delle funzioni monotone. Teoremi sul limite della somma. Teoremi sul limite del prodotto. Teoremi sul limite della funzione reciproca e della funzione quoziente. Limiti a $\pm\infty$ delle funzioni razionali. Teorema sul limite delle funzioni composte. Funzioni continue. Teoremi di confronto dei limiti. Proprietà delle funzioni continue. L'anello delle funzioni continue. Continuità della funzione composta di funzioni continue. Il teorema sul limite di una funzione composta con una funzione continua. Continuità del valore assoluto, delle funzioni razionali, delle funzioni circolari. Continuità della funzione inversa di una funzione monotona definita su un intervallo. Continuità di una funzione strettamente monotona con immagine un intervallo. Continuità delle funzioni potenza, delle funzioni esponenziali, delle funzioni logaritmo, delle funzioni circolari inverse, delle radici. I "limiti notevoli" $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^\alpha-1}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}x^\alpha\log_a x$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}|x|^\alpha a^x$. Diverse tecniche per il calcolo dei limiti. I teoremi fondamentali sulle funzioni continue. Teorema di esistenza degli zeri (di Bolzano) e il metodo di bisezione. Caratterizzazione degli intervalli. Teorema di connessione. Alcune applicazioni nella risoluzione di un'equazione. Il teorema di compattezza. Punti di massimo e di minimo assoluti e relativi di una funzione. Teorema di Weierstrass. Funzioni assolutamente continue. Teorema di Heine.

Cenni sulle funzioni complesse. Topologia del campo complesso. Palla aperta in $\mathbb{C}$. Insiemi limitati e illimitati. Intorni di un numero complesso. Punti di accumulazione, punti isolati, punti interni, punti di frontiera di un insieme. Insiemi aperti. Chiusura di un insieme. Insiemi chiusi. Insiemi compatti. Definizione di limite di una successione di numeri complessi. Il teorema sulla convergenza di una successione complessa e la convergenza delle successioni delle parti reale e immaginaria. Definizione di continuità per le funzioni complesse di variabile complessa. Proprietà delle funzioni continue (estensione delle proprietà note per le funzioni reali).

Calcolo differenziale. Il problema delle tangenti. Secante di un curva. L'inflazione, la velocità, l'intensità di corrente. Rapporto incrementale di una funzione relativamente a due punti. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della secante il grafico. Derivata di una funzione in un punto. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della tangente il grafico. Funzione derivabile in un punto. La funzione derivata. Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto. Derivata delle funzioni $f(x) = mx + q$, $f(x) = |x|$, $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{Z}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$, $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$ e $a \neq 1$. Teorema di continuità delle funzioni derivabili. L'esistenza della derivata nel punto non è sufficiente per garantire la continuità. Gli spazi vettoriali $\mathcal{C}^0(E)$ e $\mathcal{C}^1(E)$. L'operatore lineare $D : \mathcal{C}^1(E) \to \mathcal{C}^0(E)$. Teorema sulla derivata della combinazione lineare. Derivata del prodotto. Derivata della reciproca. Derivata del quoziente. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa. Osservazioni sulla formula della derivata della funzione inversa. Derivate delle funzioni radice $n-$esima, dei logaritmi, delle funzioni circolari inverse, delle funzioni iperboliche. Approssimante lineare di una funzione in un punto. Teorema di esistenza dell'approssimante lineare. Modello lineare di un problema. Differenziale di una funzione in un punto. Notazione di Leibniz per la derivata. L'equazione del pendolo. Derivate successive. Spazi $\mathcal{C}^n(E)$. e operatore D^n. Punti di estremo (massimo, minimo) relativo. Punti critici per una funzione. Teorema di Fermat (zeri della derivata e punti di estremo relativo). Considerazioni sulla ricerca dei punti di estremo. Proprietà delle funzioni derivabili su un intervallo: i teoremi di Rolle, di Cauchy, di Lagrange, la formula del valor medio. Rappresentazione parametrica di una curva piana. Un'interpretazione geometrica dei teoremi di Cauchy e di Lagrange. Monotonia su un intervallo di una funzione con derivata di segno costante. Funzioni a derivata nulla su un intervallo. Segno della derivata di una funzione monotona su un intervallo. Una condizione sufficiente per un punto di estremo relativo utilizzando il segno della derivata in un intorno. Studio di una funzione. Funzioni asintotiche. Asintoti orizzontali e obliqui a $-\infty$ e a $+\infty$. Un teorema sulla ricerca degli asintoti. Il teorema di de L'Hôpital. Applicazioni del teorema di de l'Hôpital al calcolo dei limiti. Il teorema sul limite della derivata. Una funzione derivata non può avere discontinuità di tipo "salto".

Funzioni infinite e funzioni infinitesime in un punto. Ordine di infinito (infinitesimo); confronto tra ordini di infinito (infinitesimo). Ordini di infinito (infinitesimo) reali, soprareali, sottoreali, infrareali. o piccolo di Landau. Il lemma di Peano. Un'applicazione al calcolo dell'ordine di infinitesimo di una funzione in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Polinomio approssimante n-esimo di una funzione in un punto. Teorema di Taylor. Resto nella forma di Peano e resto nella forma di Lagrange. Il polinomio di Taylor-Mac Laurin di ordine n delle principali funzioni elementari: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\log(1 + x)$, $(1 + x)^\alpha$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$. L'uso del polinomio di Taylor per approssimare il valore di una funzione con valutazione dell'errore.

Insiemi convessi di $\mathbb{R}^n$. Sopragrafico di una funzione. Funzione convessa su un intervallo. Proprietà delle funzioni convesse su un intervallo I: monotonia per ogni $x_0 \in I$ della funzione rapporto incrementale $\varphi_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, esistenza in ogni punto interno ad I delle derivate destra e sinistra, continuità in ogni punto interno ad I della funzione, monotonia delle derivate destra e sinistra. Caratterizzazione delle funzioni derivabili convesse (fortemente convesse) come funzioni la cui derivata è crescente (strettamente crescente). Relazione tra convessità e segno della derivata seconda per una funzione due volte derivabile su un intervallo. Convessità e retta tangente. Punto di flesso ascendente e discendente. La derivata seconda si annulla in un punto di flesso. Test della derivata seconda per i punti di massimo e minimo relativo.

Calcolo integrale. Il problema della definizione dell'area di una figura piana. Decomposizione di un intervallo compatto. Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori di una funzione limitata su un intervallo compatto. Proprietà di confronto tra somme integrali. Funzione integrabile secondo Riemann su un intervallo compatto. Integrale di una funzione integrabile su un intervallo compatto. Esempio di calcolo dell'integrale dalla definizione. Trascurabilità degli insiemi infiniti nell'integrale di Riemann. Teorema di integrabilità delle funzioni monotone. Teorema di integrabilità delle funzioni continue. Esempio di funzione non integrabile. Proprietà dell'integrale di Riemann: linearità, prodotto, monotonia, valore assoluto, restrizione, additività. Teorema della media integrale. Funzioni localmente integrabili su un intervallo. Integrale orientato di una funzione localmente integrabile su un intervallo. Teorema di Chasles. Funzione integrale di una funzione f con punto iniziale x_0. Teorema di continuità della funzione integrale. Il teorema fondamentale del calcolo. Funzioni primitivabili. Funzioni primitive. Le funzioni continue sono primitivabili. Esempio di una funzione primitivabile non continua. Caratterizzazione delle funzioni primitive su un intervallo. Tabella delle primitive immediate. La formula di Torricelli Barrow. L'integrazione indefinita come operatore inverso della derivazione. Determinazione di una primitiva per scomposizione in somma, per parti, per sostituzione. Integrazione definita per parti e per sostituzione. Fattorizzazione di un polinomio in $\mathbb{R}$. Primitive delle funzioni razionali: metodo di decomposizione di Hermite. Primitive di alcune funzioni riconducibili ad integrali di funzioni razionali mediante sostituzioni opportune. Studio di una funzione integrale. Derivata di una funzione del tipo $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\, dt$. Funzioni integrabili in senso generalizzato e integrale generalizzato di una funzione su un intervallo non compatto. Aut aut per la convergenza dell'integrale delle funzioni non negative. Criterio del confronto per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative. Criterio dell'ordine di infinitesimo per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative su intervalli chiusi illimitati. Criterio dell'ordine di infinito per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative non limitate su intervalli del tipo $[a, b[$ o $]a, b[$. Funzioni assolutamente integrabili. L'assoluta integrabilità in senso generalizzato di una funzione localmente integrabile implica l'integrabilità in senso generalizzato.

Serie numeriche. Il concetto di somma infinita. Serie di numeri reali. Carattere di una serie. Termine generale di una serie. Ridotta (somma parziale) n-esima di una serie. Serie convergente, divergente, indeterminata. Serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$. Il carattere di una serie non viene modificato modificando un numero finito di termini. Serie somma di due serie. Condizione necessaria (non sufficiente) per la convergenza di una serie. Le serie come particolari integrali generalizzati. Serie armonica e serie armonica generalizzata. Serie a termini positivi. Aut aut per le serie a termini di segno costante. Criteri del confronto e dell'ordine di infinitesimo. Serie di Mengoli. Criteri del rapporto e della radice per le serie a termini positivi. Se per una serie è applicabile il criterio del rapporto, allora il termine generale della serie è un infinitesimo soprareale. Serie a termini di segno misto. Serie assolutamente convergenti e serie semplicemente convergenti. Una serie assolutamente convergente è convergente. L'esempio della serie di Leibniz. Criterio di convergenza di Leibniz per le serie a termini di segno alterno. Stima della somma di una serie di Leibniz. Alcuni esempi di applicazione delle serie: le antinomie di Zenone, la pallina di ping pong, l'insetto e il bambino dispettoso, il picchio bigamo. Serie di numeri complessi e loro convergenza. Serie delle parti reale e immaginaria. Serie geometrica di ragione complessa. Serie assolutamente convergenti di numeri complessi. Una serie assolutamente convergente è convergente.

Argomenti relativi alla prima prova. Teoria degli insiemi. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. I numeri naturali e il calcolo combinatorio. Funzioni elementari. Successioni di numeri reali e di numeri complessi. Topologia del campo reale e del campo complesso. Limiti delle funzioni reali e complesse. Funzioni continue e teoremi relativi. Limiti notevoli.

Argomenti relativi alla seconda prova. Calcolo differenziale. Studi di funzioni. Calcolo integrale. Serie numeriche.

Testi consigliati

P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di analisi matematica 2 (per il diploma universitario)*, Università degli Studi di Trieste, Facoltà di Ingegneria. (Da richiedersi al docente su supporto informatico).

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, *Matematica. Calcolo infinitesimale e algebra lineare.*, Zanichelli

Presso la segreteria sono disponibili fogli di esercizi sugli argomenti trattati e i testi degli esami precedenti. Alla pagina http://www.dsm.univ.trieste.it/~obersnel potete trovare ulteriori informazioni sul corso, tutti gli esercizi assegnati a lezione, esercizi svolti, compiti assegnati agli esami.