Università di Tieste – Facoltà d'Ingegneria.

Laurea in ingegneria logistica e della produzione
Laurea in ingegneria industriale (curricula logistica e materiali)

Corso di Analisi Matematica 1
Anno Accademico 2004/2005

Dott. Franco Obersnel

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Assiomi di campo. Alcune proprietà algebriche dei campi. Relazioni d'ordine. Insiemi ordinati e insiemi totalmente ordinati. Assiomi di campo ordinato. Alcune proprietà dei campi ordinati. Alcuni sottoinsiemi di un campo ordinato: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Il numero come strumento di misura. I numeri razionali non sono sufficienti per misurare la lunghezza di un segmento. Irrazionalità della radice quadrata di 2. Insiemi separati e insiemi contigui. Elemento separatore. Proprietà di continuità (di Dedekind). Unicità dell'elemento separatore tra insiemi contigui. $\mathbb{R}$ è un campo totalmente ordinato completo.

Minimo e massimo di un insieme ordinato. Unicità del minimo (massimo). Limitazioni superiori ed inferiori di un sottoinsieme di un insieme ordinato. Sottoinsiemi limitati e illimitati superiormente e inferiormente. Estremo superiore ed estremo inferiore di un sottoinsieme limitato in un insieme ordinato. Teorema di esistenza dell'estremo superiore (inferiore) in $\mathbb{R}$. Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore (inferiore) in $\mathbb{R}$. Le notazioni $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$. Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Palla aperta di centro x_0 e raggio r. Intorni di un punto. La notazione decimale di un numero razionale. I numeri reali sono "approssimabili" mediante i numeri razionali.

I numeri naturali. Proprietà fondamentali (assiomi di Peano). Il principio di induzione (formulazione insiemistica e formulazione logica). Esempi di verifiche utilizzando il principio di induzione. Alcune identità $(\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ per $x \neq 1)$. Definizioni per ricorrenza. Successione di numeri reali.

Permutazioni di un insieme. Il fattoriale di n. Il numero delle possibili permutazioni di un insieme di n elementi è $n!$. Combinazioni di classe k di un insieme di n elementi. Coefficienti binomiali. Il numero delle possibili combinazioni di classe k di un insieme di n elementi è $\binom{n}{k}$. La formula del binomio di Newton.

Funzioni elementari. La funzione valore assoluto. Proprietà del valore assoluto. Descrizione di un intorno aperto simmetrico mediante il valore assoluto. Dominio, codominio, insieme immagine di una funzione, controimmagine di un insieme. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Funzione composta. Algebra delle funzioni reali. Funzioni inverse. Funzioni monotone. Funzioni pari e dispari. Grafico di una funzione. Funzioni limitate e illimitate. Massimo, minimo, estremi superiore ed inferiore di una funzione. Le funzioni costanti. La funzione identica. La funzione potenza di esponente naturale. Proprietà della funzione potenza di esponente naturale. La funzione radice ennesima e sue proprietà. Polinomi e funzioni razionali. La potenza di esponente intero e sue proprietà. La potenza di esponente razionale. La potenza di esponente reale e sue proprietà. La funzione esponenziale e sue proprietà. La funzione logaritmo e sue proprietà. Funzioni periodiche, periodo, periodo minimo. Le funzioni circolari $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ e le loro proprietà. Relazioni fondamentali tra funzioni circolari. Funzioni circolari inverse e loro proprietà: arcoseno, arcocoseno, arcotangente. Studio di grafici di funzioni ottenute mediante traslazioni, dilatazioni o composizione con il valore assoluto di una funzione nota. Le funzioni iperboliche $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$; loro proprietà e formule principali. Le funzioni iperboliche inverse.

Limiti di successioni. Successioni di numeri reali. Successioni limitate. Successioni monotone. Proprietà che si verificano definitivamente. Definizione di limite finito di una successione di numeri reali. Successioni convergenti. Successioni infinitesime. Una successione convergente è limitata. Teorema di unicità del limite. Successioni divergenti. Limite $+\infty$ o $-\infty$ di una successione di numeri reali. Sottosuccessioni. Limite delle sottosuccessioni ed un criterio per la non esistenza del limite di una successione. Successioni monotone. Teorema di esistenza del limite di una successione monotona. Il numero e di Nepero. Il limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Intorni di un numero reale, di $-\infty$ e di $+\infty$. Proprietà degli intorni. Definizione di limite di una successione mediante la nozione di intorno.

Limiti di funzioni reali e funzioni continue. Punti di accumulazione di un insieme. Punti isolati di un insieme. Punti interni di un insieme. Chiusura di un insieme. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Limite per x che tende a x_0 di una funzione $f(x)$ (definizione con gli intorni). Definizioni esplicite nei casi $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = -\infty$, $x_0 = +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = -\infty$, $\alpha = +\infty$. Teorema di unicità del limite. Teorema sul limite della restrizione. Un criterio per stabilire la non esistenza del limite. Limiti destri e sinistri. Il limite esiste se e solo se esistono e sono uguali limite destro e sinistro. Limiti delle funzioni monotone. Funzioni discoste da zero. Toerema della limitatezza locale. Teorema della permanenza del segno per i limiti. Teorema sul limite della somma. Teorema sul limite del prodotto. Teorema sul limite della funzione reciproca (senza dimostrazione). Teorema sul limite delle funzioni composte. Limiti delle funzioni razionali. Teoremi di confronto dei limiti. Funzioni continue. Proprietà delle funzioni continue. Continuità del valore assoluto, delle funzioni razionali, delle funzioni potenza, delle funzioni esponenziali, delle funzioni circolari. Continuità della funzione inversa di una funzione monotona definita su un intervallo. Continuità delle funzioni logaritmo, delle funzioni circolari inverse, delle radici. I "limiti notevoli" $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^\alpha - 1}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha}$, $\lim_{x\to 0} x^\alpha \log_a x$. Diverse tecniche per il calcolo dei limiti. I teoremi fondamentali sulle funzioni continue. Teorema di esistenza degli zeri (di Bolzano), e metodo di bisezione (con dimostrazione). Teorema di connessione. Alcune applicazioni per la risoluzione di un'equazione. Punti di estremo assoluto di una funzione. Teorema di Weierstrass (senza dimostrazione).

Calcolo differenziale. Il problema delle tangenti. Secante di un curva. Il problema della velocità. Rapporto incrementale di una funzione relativamente a due punti. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della secante il grafico. Derivata di una funzione in un punto. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della tangente il grafico. Funzione derivabile in un punto. Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto. Teorema di continuità delle funzioni derivabili. L'esistenza della derivata nel punto non è sufficiente per garantire la continuità. La funzione derivata. Gli spazi vettoriali $\mathcal{C}^0(E)$ e $\mathcal{C}^1(E)$. L'applicazione lineare $D : \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^0(I)$. Teorema sulla derivata della combinazione lineare. Derivata del prodotto. Derivata della reciproca. Derivata del quoziente. Derivate delle funzioni x^n, x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x ($a \in \mathbb{R}^+$).

Approssimante lineare di una funzione in un punto. Teorema di esistenza dell'approssimante lineare. Modello lineare di un problema. Differenziale di una funzione in un punto. Notazione di Leibniz per la derivata. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa (senza dimostrazione). Una giustificazione per la formula della derivata della funzione inversa. Derivate delle funzioni radice, dei logaritmi, delle funzioni circolari inverse.

Derivate successive. Spazi $\mathcal{C}^n(I)$. Punti di estremo (massimo, minimo) relativo. Estremo (massimo, minimo) relativo. Teorema di Fermat (zeri della derivata e punti di estremo relativo). Considerazioni sulla ricerca dei punti di estremo. Punti critici per una funzione.

Proprietà delle funzioni derivabili su un intervallo: i teoremi di Rolle, di Cauchy, di Lagrange, la formula del valor medio. Un'interpretazione geometrica. Funzioni a derivata nulla su un intervallo. Segno della derivata di una funzione monotona su un intervallo. Monotonia su un intervallo di una funzione con derivata di segno costante. Una condizione sufficiente per un punto di estremo relativo utilizzando il segno della derivata in un intorno. Studio di una funzione. Asintoti orizzontali e obliqui a $-\infty$ e a $+\infty$. Un teorema sulla ricerca degli asintoti. Il teorema di De L'Hospital (dimostrazione solo del caso "$\frac{0}{0}$" con $x_0 \in \mathbb{R}$). Applicazioni del teorema di De l'Hospital al calcolo dei limiti. "Forme indeterminate". Il teorema sul limite della derivata. Funzioni infinite e funzioni infinitesime in un punto. Infiniti (infinitesimi) equivalenti. Ordine di infinito (infinitesimo); confronto tra ordini di infinito (infinitesimo). Ordini di infinito (infinitesimo) reali, soprareali, sottoreali, infrareali. o piccolo di Landau. Il lemma di Peano. Un'applicazione al calcolo dell'ordine di infinitesimo di una funzione in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Polinomio approssimante n-esimo di una funzione in un punto. Teorema di Taylor. Resto nella forma di Peano e resto nella forma di Lagrange. Il polinomio di Taylor-Mac Laurin di ordine n delle principali funzioni elementari: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$. L'uso del polinomio di Taylor per approssimare il valore di una funzione con valutazione dell'errore.

Insiemi convessi di $\mathbb{R}^n$. Sopragrafico e sottografico di una funzione. Funzione convessa (concava) su un intervallo. Relazione tra convessità, comportamento della derivata prima e segno della derivata seconda per una funzione derivabile su un intervallo. Convessità e retta tangente. Punto di flesso ascendente e discendente. La derivata seconda si annulla in un punto di flesso. Test della derivata seconda per i punti di massimo e minimo relativo.

Calcolo integrale. Funzione primitivabile su un intervallo. Funzione primitiva. Caratterizzazione delle funzioni primitive. L'integrale indefinito. Tabella delle primitive immediate. Integrazione per scomposizione in somma. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione. Il problema della definizione dell'area di una figura piana. Il metodo di esaustione. Decomposizione di un intervallo. Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori di una funzione limitata su un intervallo. Proprietà di confronto tra somme integrali. Funzione integrabile secondo Riemann su un intervallo. Integrale di una funzione integrabile su un intervallo. Esempio di calcolo dell'integrale dalla definizione. Esempio di funzione non integrabile. Teorema di integrabilità delle funzioni continue (solo enunciato). Teorema di integrabilità delle funzioni monotone (con dimostrazione). Teorema di linearità dell'integrale. Teorema di monotonia dell'integrale. Teorema di integrabilità del valore assoluto. Teorema di integrabilità della funzione prodotto. Teorema della media integrale. Teorema di integrabilità della funzione restrizione e additività rispetto al dominio.

Funzioni localmente integrabili su un insieme. Integrale orientato di una funzione localmente integrabile su un intervallo. Regola di Chasles. Funzione integrale di una funzione f con punto iniziale x_0. Teorema di continuità della funzione integrale. Il teorema fondamentale del calcolo. La formula di Torricelli Barrow. Integrazione definita per parti e per sostituzione. Cenni sullo studio di una funzione integrale. Derivata di una funzione definita mediante integrali. Funzioni integrabili in senso generalizzato e integrale generalizzato di una funzione su un intervallo chiuso illimitato.