

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Laurea in ingegneria logistica e della produzione
Laurea in ingegneria dei materiali (materie plastiche)

Corso di Analisi Matematica 1
Anno Accademico 2003/2004

Dott. Franco Obersnel

I numeri naturali. Proprietà fondamentali (assiomi di Peano). Il principio di induzione (formulazione insiemistica e formulazione logica). Esempi di verifiche utilizzando il principio di induzione. Alcune identità ($\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ per $x \neq 1$). Definizioni per ricorrenza. Successione di numeri reali.

Permutazioni di un insieme. Il fattoriale di n . Il numero delle possibili permutazioni di un insieme di n elementi è $n!$. Combinazioni di classe k di un insieme di n elementi. Coefficienti binomiali. Il numero delle possibili combinazioni di classe k di un insieme di n elementi è $\binom{n}{k}$. La formula del binomio di Newton.

L'insieme \mathbb{R} dei numeri reali. Relazioni d'ordine. Insiemi ordinati e insiemi totalmente ordinati. Relazione d'ordine stretta. Minimo e massimo di un insieme ordinato. Unicità del minimo (massimo). Limitazioni superiori ed inferiori di un sottoinsieme di un insieme ordinato. Sottoinsiemi limitati e illimitati superiormente e inferiormente. Estremo superiore ed estremo inferiore di un sottoinsieme limitato in un insieme ordinato. Assiomi di campo. Alcune proprietà algebriche dei campi. Assiomi di campo ordinato. Alcune proprietà dei campi ordinati. Alcuni sottoinsiemi di un campo ordinato: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} . Il numero come strumento di misura. I numeri razionali non sono sufficienti per misurare la lunghezza di un segmento. Irrazionalità della radice quadrata di 2.

Insiemi separati e insiemi contigui. Elemento separatore. Proprietà di continuità (di Dedekind). Unicità dell'elemento separatore tra insiemi contigui. \mathbb{R} è un campo totalmente ordinato completo. Teorema di esistenza dell'estremo superiore (inferiore) in \mathbb{R} . Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore (inferiore) in \mathbb{R} . La proprietà di Archimede. Le notazioni $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$. Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} . Intorni aperti simmetrici di un punto.

Funzioni elementari. La funzione valore assoluto. Proprietà del valore assoluto. Descrizione di un intorno aperto simmetrico mediante il valore assoluto. Dominio, codominio, insieme immagine di una funzione. Algebra delle funzioni reali. Funzioni composte. Funzioni inverse. Funzioni monotone. Funzioni pari e dispari. Grafico di una funzione. Le funzioni costanti. La funzione identica. La funzione potenza di esponente naturale. Monotonia della funzione potenza di esponente naturale. La funzione radice ennesima e sue proprietà. Polinomi e funzioni razionali. La potenza di esponente intero e sue proprietà. La potenza di esponente razionale. La potenza di esponente reale e sue proprietà. La funzione esponenziale e sue proprietà. La funzione logaritmo e sue proprietà. Funzioni periodiche, periodo, periodo minimo. Le funzioni circolari $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e le loro proprietà. Relazioni fondamentali tra funzioni circolari. Funzioni circolari inverse e loro proprietà: arcoseno, arcocoseno, arcotangente. Studio di grafici di funzioni ottenute mediante traslazioni, dilatazioni o composizione con il valore assoluto di una funzione nota. Le funzioni iperboliche $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$; loro proprietà e formule principali. Le funzioni iperboliche inverse.

Limiti di successioni. Il concetto di convergenza per una successione di punti del piano. Successioni di numeri reali. Definizione di limite finito di una successione di numeri reali. Proprietà che si verificano definitivamente. Successioni convergenti. Successioni limitate. Una successione convergente è limitata. Teorema di unicità del limite. Successioni divergenti. Limite infinito di una successione di numeri reali. Sottosuccessioni. Limite delle sottosuccessioni ed un criterio per la non esistenza del limite di una successione. Successioni monotone. Teorema di esistenza del limite di una successione monotona. Il numero e di Nepero. Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Intorni di un numero reale, di $-\infty$ e di $+\infty$. Proprietà degli intorni. Definizione di limite di una successione mediante la nozione di intorno.

Limiti di funzioni reali e funzioni continue. Punti di accumulazione di un insieme. Punti isolati di un insieme. Punti interni di un insieme. Chiusura di un insieme. Limite per x che tende a x_0 di una funzione $f(x)$ (definizione con gli intorni). Definizioni esplicite nei casi $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = -\infty$, $x_0 = +\infty$,

$l \in \mathbb{R}$, $l = -\infty$, $l = +\infty$. Asintoti orizzontali. Teorema di unicità del limite. Teorema sul limite della restrizione. Un criterio per stabilire la non esistenza del limite. Limiti destri e sinistri. Il limite esiste se e solo se esistono e sono uguali limite destro e sinistro. La funzione di Heaviside. Limiti delle funzioni monotone. Funzioni discoste da zero. Teorema della limitatezza locale. Teorema della permanenza del segno per i limiti. Teorema sul limite della somma. Teorema sul limite del prodotto. Teorema sul limite della funzione reciproca (senza dimostrazione). Limiti delle funzioni razionali. Teorema sul limite delle funzioni composte. Teoremi di confronto dei limiti. Funzioni continue. Proprietà delle funzioni continue. Continuità del valore assoluto, delle funzioni razionali, delle funzioni potenza, delle funzioni esponenziali, delle funzioni circolari. Continuità della funzione inversa di una funzione monotona definita su un intervallo. Continuità delle funzioni logaritmo, delle funzioni circolari inverse, delle radici. I "limiti notevoli" $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^\alpha - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha}$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log_a x$. Diverse tecniche per il calcolo dei limiti. I teoremi fondamentali sulle funzioni continue. Teorema di esistenza degli zeri (di Bolzano), e metodo di bisezione (con dimostrazione). Teorema di connessione. Alcune applicazioni per la risoluzione di un'equazione. Punti di estremo assoluto di una funzione. Insiemi chiusi di \mathbb{R} . Teorema di Weierstrass (senza dimostrazione).

Calcolo differenziale. Il problema delle tangenti. Il problema della velocità. Rapporto incrementale di una funzione relativamente ad un punto. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della secante il grafico. Derivata di una funzione in un punto. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della tangente il grafico. Funzione derivabile in un punto. Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto. Teorema di continuità delle funzioni derivabili. L'esistenza della derivata nel punto non è sufficiente per garantire la continuità. La funzione derivata. Gli spazi vettoriali $\mathcal{C}^0(I)$ e $\mathcal{C}^1(I)$. Teorema sulla derivata della combinazione lineare. L'applicazione lineare $D : \mathcal{C}^1(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I)$. Derivata del prodotto. Derivata della reciproca. Derivata del quoziente. Derivate delle funzioni x^n , x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x ($a \in \mathbb{R}^+$).

Approssimante lineare di una funzione in un punto. Teorema di esistenza dell'approssimante lineare. Modello lineare di un problema. Differenziale di una funzione in un punto. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa (senza dimostrazione). Una giustificazione per la formula della derivata della funzione inversa. Derivate delle funzioni radice, dei logaritmi, delle funzioni circolari inverse.

Derivate successive. Spazi $\mathcal{C}^n(I)$ e operatore D^n .

Proprietà locali del primo ordine. Funzione crescente (decrescente) in un punto. Punto di estremo (massimo, minimo) relativo. Estremo (massimo, minimo) relativo. Una funzione crescente in ogni punto di un intervallo è crescente sull'intervallo (senza dimostrazione). Relazione tra la crescita puntuale e la derivata di una funzione in un punto. Teorema di Fermat. Considerazioni sulla ricerca dei punti di estremo. Punti critici per una funzione. Una condizione sufficiente per un punto di estremo relativo utilizzando il segno della derivata in un intorno. Studio di una funzione. Asintoti orizzontali e obliqui a $-\infty$ e a $+\infty$. Un teorema sulla ricerca degli asintoti. Proprietà delle funzioni derivabili su un intervallo: i teoremi di Rolle, di Cauchy, di Lagrange, la formula del valor medio. Funzioni a derivata nulla su un intervallo. Il teorema di de L'Hospital. Applicazioni del teorema di de l'Hospital al calcolo dei limiti. Il teorema sul limite della derivata.

Funzioni infinite e funzioni infinitesime in un punto. Infiniti (infinitesimi) equivalenti. Ordine di infinito (infinitesimo); confronto tra ordini di infinito (infinitesimo). Ordini di infinito (infinitesimo) reali, soprareali, sottoreali, infrareali. o piccolo di Landau. Il lemma di Peano (dimostrazione nel caso in cui $f \in \mathcal{C}^n(I)$). Un'applicazione al calcolo dell'ordine di infinitesimo di una funzione in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Polinomio approssimante n -esimo di una funzione in un punto. Teorema di Taylor. Resto nella forma di Peano e resto nella forma di Lagrange. Il polinomio di Taylor-Mac Laurin di ordine n delle principali funzioni elementari: $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$. L'uso del polinomio di Taylor per approssimare il valore di una funzione con valutazione dell'errore.

Insiemi convessi di \mathbb{R}^n . Sopragrafico e sottografo di una funzione. Funzione convessa (concava) su un intervallo. Caratterizzazione delle funzioni convesse su un intervallo utilizzando il rapporto incrementale (solo enunciato). Relazione tra la convessità, la continuità e le derivate destra e sinistra di una funzione (solo enunciato). Relazione tra convessità, comportamento della derivata prima e segno della derivata seconda per una funzione derivabile su un intervallo (solo enunciato). Punto di flesso ascendente e discendente. La

derivata seconda si annulla in un punto di flesso (con dimostrazione). Condizione sufficiente affinché un punto sia di flesso utilizzando il segno della derivata seconda. Test della derivata seconda per i punti di massimo e minimo relativo.

Calcolo integrale. Funzione primitivabile su un intervallo. Funzione primitiva. Caratterizzazione delle funzioni primitive. L'integrale indefinito. Tabella delle primitive immediate. Integrazione per scomposizione in somma. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione. Il teorema fondamentale dell'algebra. Fattorizzazione di un polinomio in \mathbb{C} e in \mathbb{R} . Integrazione delle funzioni razionali: metodo di decomposizione di Hermite. Integrazione di alcune funzioni riconducibili mediante sostituzioni opportune ad integrali di funzioni razionali.

Il problema della definizione dell'area di una figura piana. Il metodo di esaustione. Decomposizione di un intervallo. Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori di una funzione limitata su un intervallo. Proprietà di confronto tra somme integrali. Funzione integrabile secondo Riemann su un intervallo. Integrale di una funzione integrabile su un intervallo. Esempio di calcolo dell'integrale dalla definizione. Esempio di funzione non integrabile. Teorema di integrabilità delle funzioni continue (solo enunciato). Teorema di integrabilità delle funzioni monotone (con dimostrazione). Teorema di linearità dell'integrale (solo enunciato). Teorema di monotonia dell'integrale (con dimostrazione). Teorema di integrabilità del valore assoluto (solo enunciato). Teorema di integrabilità della funzione prodotto (solo enunciato). Teorema della media integrale (con dimostrazione). Teorema di integrabilità della funzione restrizione e additività rispetto al dominio (solo enunciato).

Funzioni localmente integrabili su un insieme. Integrale orientato di una funzione localmente integrabile su un intervallo. Regola di Chasles. Funzione integrale di una funzione f con punto iniziale x_0 . Teorema di continuità della funzione integrale (con dimostrazione). Il teorema fondamentale del calcolo (con dimostrazione). La formula di Torricelli Barrow (con dimostrazione). Integrazione definita per parti e per sostituzione. Derivata di una funzione definita mediante integrali.

Testi consigliati

P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di analisi matematica 2 (per il diploma universitario)*, Università degli Studi di Trieste, Facoltà di Ingegneria. (Da richiedere al tutore o reperibile in rete).

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, *Matematica. Calcolo infinitesimale e algebra lineare.*, Zanichelli

Altri testi

Per un'impostazione di stile *americano*: A. Adams, *Calcolo differenziale 1 e 2*, Casa Editrice Ambrosiana
J. Stewart, *Calcolo 1 e 2*, Apogeo (2002).

Per la consultazione su argomenti di matematica generale: A. Avantaggiati, *Istituzioni di matematica*, Casa Editrice Ambrosiana-Milano.

Testi classici: E. Giusti, *Analisi matematica 1 e 2 Esercizi e complementi di analisi matematica*, Bollati Boringhieri ;

G. Gilardi, *Analisi uno e Analisi due*, McGraw-Hill.

Presso la segreteria sono disponibili fogli di esercizi sugli argomenti trattati e i testi degli esami precedenti. Alla pagina <http://www.dsm.univ.trieste.it/~obersnel> potete trovare ulteriori informazioni sul corso, tutti gli esercizi assegnati a lezione, esercizi svolti, compiti assegnati agli esami.