Università di Trieste

Lauree in ingegneria elettronica e informatica e in ingegneria civile e ambientale

Corso di Analisi Matematica 1
Anno Accademico 2023/2024

Prof. Franco Obersnel

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Alcuni richiami sugli insiemi. Appartenenza, inclusione, unione, intersezione, differenza, differenza simmetrica. Prodotto cartesiano, relazioni binarie. Relazioni di equivalenza, proprietà ed esempi. Classi di equivalenza. L'esempio dei numeri razionali. L'esempio $\mathbb{Z}_p$ delle classi di resto modulo p. Relazioni d'ordine, proprietà ed esempi. Relazioni d'ordine parziali e totali. L'insieme delle parti di un insieme e la relazione di inclusione. Insiemi ordinati. Limitazioni superiori (maggioranti)/ inferiori (minoranti) di un insieme ordinato. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Insiemi limitati. Insiemi illimitati. Massimo e minimo di un sottoinsieme di un insieme ordinato. Teorema di unicità del minimo (massimo). Estremo superiore / inferiore di un sottoinsieme di un insieme ordinato. Funzioni. Dominio, codominio, insieme immagine, insieme controimmagine. Grafico di una funzione. Funzioni suriettive, iniettive, biiettive. Funzione inversa. Il grafico della funzione inversa. Funzioni composte. Esempi di funzioni: funzione costante, funzione identica, funzione caratteristica, la funzione di Dirichlet, le proiezioni, il valore assoluto. Esempi di equazioni con il valore assoluto. Composizione di una funzione invertibile con la propria inversa. Assiomi di campo. Assiomi di campo-ordinato. Esempi di campi finiti ($\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_p$). Alcuni sottoinsiemi di un campo-ordinato: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato in $\mathbb{Q}$ (proprietà di Archimede in $\mathbb{Q}$) e conseguenze. Assioma di Dedekind. Campi-ordinati completi. $\mathbb{R}$ è un campo-ordinato completo. Insiemi separati. Elemento separatore. Insiemi contigui. Irrazionalità della radice quadrata di 2. Esempio di un insieme limitato di $\mathbb{Q}$ per il quale non esiste estremo superiore. $\mathbb{Q}$ è un campo-ordinato ma non è completo. $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato in $\mathbb{R}$ e corollari (proprietà di Archimede in $\mathbb{R}$). Teorema della densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Numeri irrazionali. Densità di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Proprietà caratteristiche dell'estremo sup. (inf.) in $\mathbb{R}$.

I numeri naturali e il calcolo combinatorio. Proprietà fondamentali (assiomi di Peano). Il principio di induzione (formulazione insiemistica e formulazione logica). Esempi di verifiche utilizzando il principio di induzione. La disuguaglianza di Bernoulli. Le formule per le somme $1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$ e $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ con $x \in \mathbb{R}$. Esempi di definizioni per ricorrenza. La potenza a^n con $a \in \mathbb{R}$. Il fattoriale $n!$. Calcolo combinatorio. Permutazioni di un insieme. Il fattoriale di n. Il numero delle possibili permutazioni di un insieme di n elementi (senza e con ripetizioni). Disposizioni e disposizioni con ripetizione a k a k di un insieme di n elementi. Combinazioni a k a k di un insieme di n elementi. Il numero delle possibili disposizioni (eventualmente con ripetizione) e combinazioni a k a k di un insieme di n elementi. Coefficienti binomiali e alcune loro proprietà. La formula di Stifel e il triangolo di Tartaglia. La formula del binomio di Newton. Corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle parti di un insieme E e l'insieme delle funzioni $\{f : E \to \{0, 1\}\}$. Il numero delle funzioni $f : A \to B$. Il numero dei sottoinsiemi di un insieme.

Funzioni elementari. La funzione valore assoluto. Proprietà del valore assoluto in $\mathbb{R}$. Descrizione delle disequazioni $|x - x_0| < r$ e $|x - x_0| > r$. La disuguaglianza $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Equazioni e disequazioni con il valore assoluto. Funzioni. Le notazioni $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$. Funzioni limitate e illimitate. Massimo, minimo, estremi superiore e inferiore di una funzione. Funzioni pari e dispari. Algebra delle funzioni reali. Funzione somma, funzione prodotto, funzione quoziente. Funzioni polinomiali e funzioni razionali. Funzioni composte. Studio di grafici di funzioni ottenute mediante traslazioni, dilatazioni o composizione con il valore assoluto di una funzione nota. Funzioni monotone (strettamente crescenti/decrescenti, debolmente crescenti/decrescenti). La funzione parte intera. La funzione mantissa. Funzione minimo/massimo di due funzioni. Composizione di funzioni monotone. Inversa di una funzione monotona. La funzione potenza di esponente naturale. Proprietà algebriche e proprietà analitiche della funzione potenza di esponente naturale. Teorema di esistenza della radice ennesima (dimostrazione richiesta per il caso $n = 3$). La funzione radice ennesima e le sue proprietà. Le potenze di esponente intero e razionale e le loro proprietà analitiche e algebriche. La potenza di esponente reale. Proprietà algebriche delle potenze di esponente reale (senza dimostrazioni). La funzione esponenziale a^x, con $a > 0$, e le sue proprietà analitiche (senza dimostrazioni). La funzione logaritmo e le sue proprietà algebriche e analitiche. Cenni all'uso dei logaritmi, il ph, il decibel, la magnitudo dei terremoti, il regolo calcolatore. Funzioni periodiche, periodo, periodo minimo. Esempi:

le funzioni costanti, la funzione di Dirichlet, la funzione mantissa. Misura di un angolo in radianti. Le funzioni circolari seno, coseno e le loro proprietà principali. Relazioni fondamentali tra funzioni circolari. Angoli significativi. Risoluzione di un triangolo rettangolo. Formule di addizione di seno e coseno (cenni alla dimostrazione grafica). Cenni alle formule di Werner e di prostaferesi (non è richiesto di ricordarle a memoria, ma di saperle ricavare). La funzione tangente e il suo significato geometrico. Le funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente e loro proprietà. Soluzioni di un'equazione del tipo $\operatorname{sen} x = b$, $\cos x = b$, $\operatorname{tg} x = b$. Combinazioni lineari in seno e coseno e riduzione alla forma $A \sin(\omega x + \varphi)$. Funzioni "oscillanti" del tipo $e^{-x} \operatorname{sen} x$ e il loro studio. Intorni di un numero reale, di $-\infty$ e di $+\infty$. Proprietà degli intorni (in particolare la proprietà di separazione di Hausdorff).

Successioni di numeri reali. Successioni in un insieme X. La successione di Fibonacci. La successione $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ dove $(x_n)_n$ è la successione di Fibonacci. Successioni limitate/illimitate. Successioni monotone. Proprietà verificate definitivamente. Definizione di limite finito di una successione di numeri reali. Successioni convergenti. Successioni divergenti. Limite $+\infty$ o $-\infty$ di una successione di numeri reali. Definizione di limite di una successione usando la nozione di intorno. Teorema di limitatezza di una successione convergente e illimitatezza di una successione divergente. Teorema di unicità del limite di una successione. Sottosuccessioni. Teorema sul limite delle sottosuccessioni e un criterio per la non esistenza del limite di una successione. Teorema di esistenza del limite di una successione monotona. Il teorema del confronto per i limiti di successioni e il teorema dei due carabinieri. Il teorema della permanenza del segno. Il teorema sul limite della combinazione lineare di due successioni (limiti finiti e infiniti). Il teorema sul limite del prodotto e del quoziente di due successioni convergenti. Varianti per i limiti infiniti. Esempi di applicazione dei teoremi algebrici e forme indeterminate. Esempi di calcolo di limiti. Convergenza al numero aureo ϕ della successione $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ dove $(x_n)_n$ è la successione di Fibonacci (traccia della dimostrazione). La successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$: limitatezza (con dimostrazione) e crescenza (senza dimostrazione), il numero e di Nepero. Rappresentazione in base b di un numero reale. Differenza nella rappresentazione tra un numero razionale e un numero irrazionale. Il Teorema di Bolzano-Weierstrass (esistenza di una sottosuccessione convergente di una successione limitata): il metodo di bisezione. Esistenza di una sottosuccessione divergente estratta da una successione illimitata.

Limiti di funzioni reali e funzioni continue. Limite per x che tende a $-\infty$ o a $+\infty$ di una funzione $f(x)$. La necessità di definire il limite per x che tende a un numero reale. Punti di accumulazione di un insieme. Punti di accumulazione e limiti di una successione. Punti isolati di un insieme. Insiemi discreti. Chiusura di un insieme. Insiemi chiusi. Insiemi aperti (un insieme ha il complementare in $\mathbb{R}$ chiuso se e solo se è intorno di ogni suo punto). Insiemi compatti in $\mathbb{R}$ (come chiusi e limitati). Teorema di caratterizzazione degli insiemi compatti di $\mathbb{R}$ mediante le successioni. Insiemi limitati e infiniti ed esistenza di punti di accumulazione. Limite per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ di una funzione $f(x)$ (definizione generale con gli intorni). Definizioni esplicite nei casi del limite finito, limite $-\infty$, limite $+\infty$. Caratterizzazione del limite di una funzione mediante le successioni. Teorema di unicità del limite di funzioni. Teoremi sul limite della combinazione lineare, del prodotto, del quoziente. Teorema del confronto per i limiti di funzioni e teorema dei "due carabinieri". Teorema sul limite della restrizione. Un criterio per stabilire la non esistenza del limite. Limiti destri e sinistri. Il limite esiste se e solo se esistono e sono uguali limite destro e sinistro. Teorema della limitatezza locale. Funzioni localmente discoste da zero. Teorema della permanenza del segno per i limiti. Teorema sul limite delle funzioni monotone. Funzioni continue in un punto. Funzioni continue a destra e a sinistra. Funzioni continue su un insieme. Esempi di funzioni continue e discontinue. Discontinuità di tipo "salto". Continuità delle funzioni somma, prodotto, quoziente. Continuità delle funzioni razionali. Proprietà locale di Lipischitz in un punto e continuità delle funzioni che soddisfano tale proprietà. Continuità del valore assoluto. Continuità della funzione composta di funzioni continue. Il teorema sul limite della funzione composta. Osservazioni sulla continuità in zero delle funzioni pari o dispari. Continuità delle funzioni definite a tratti. Funzioni continue e funzioni monotone: esempi di una funzione monotona su un intervallo non continua né a destra né a sinistra, una funzione invertibile e continua non monotona, una funzione invertibile su un intervallo non monotona e non continua. Teorema fondamentale di contimuità per le funzioni monotone con immagine un intervallo. Continuità delle funzioni elementari: seno, coseno, tangente e le loro inverse, funzioni esponenziali e logaritmiche, potenze e radici. Esempio di funzione continua con inversa non continua. Gli insiemi compatti in $\mathbb{R}$ hanno massimo e minimo. Il teorema di compattezza. Il teorema di Weierstrass. Il teorema di esistenza degli zeri (di Bolzano) e il metodo di bisezione. Il teorema di connessione. Alcune applicazioni alla risoluzione di un'equazione. Una funzione continua e invertibile su un intervallo è monotona. Funzioni uniformemente continue. Il teorema di Heine-Cantor (solo enunciato). Il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e suoi corollari. Sostituzione della variabile nel calcolo di un limite. Limiti a $x_0 \in \mathbb{R}$ e a $\pm\infty$ delle funzioni razionali. Comportamento delle funzioni a infinito: confronti asintotici, funzioni infinite e ordini di infinito, i limiti $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha}$, $\lim_{x\to 0} x^\alpha \log_a x$. $\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x$, Funzioni infinite soprareali e sottoreali. I limiti $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$. $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^\alpha-1}{x}$. Funzioni infinite in un punto, ordini di infinito in x_0. Funzioni infinitesime in $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ordini di infinitesimo.

Calcolo differenziale. Il problema delle tangenti. Secante passante per due punti di un curva. Coefficiente angolare. Incremento. Rapporto incrementale di una funzione relativamente a due punti. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della secante il grafico. La velocità, l'intensità di corrente, l'inflazione, la pendenza. Derivata di una funzione in un punto. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della tangente il grafico. Equazione della retta tangente. Esempio di derivata infinita. Funzione derivabile in un punto. La funzione derivata. Derivate di ordine n. Derivata delle funzioni $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = a^x$ con $a > 0$, $f(x) = |x|$. Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto. Teorema di continuità delle funzioni derivabili. L'esistenza della derivata nel punto non è sufficiente per garantire la continuità. Funzioni continue non derivabili. Teorema sulla derivata della combinazione lineare. Gli spazi vettoriali $\mathcal{C}^0(E)$, $\mathcal{C}^1(E)$ e $\mathcal{C}^n(E)$. Gli operatori lineari $D : \mathcal{C}^1(E) \to \mathcal{C}^0(E)$ e $D^k : \mathcal{C}^n(E) \to \mathcal{C}^{n-k}(E)$. L'accelerazione come derivata seconda. Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, definizione di soluzione. La seconda legge di Newton, caduta nel campo della gravità. Derivate delle funzioni $\log_a(x)$, x^α, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$. Derivata del prodotto. Derivata della funzione reciproca e del quoziente. Derivata della funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa. Osservazioni geometriche sulla formula della derivata della funzione inversa. Derivata delle funzioni radice $n-$esima, dei logaritmi, delle funzioni circolari inverse. L'equazione del pendolo. Modello lineare di un problema. Approssimante lineare di una funzione in un punto. Funzioni differenziabili. Teorema di esistenza dell'approssimante lineare. Differenziale di una funzione in un punto. Formula di Taylor del primo ordine. o piccolo di Landau. Punti di estremo (massimo, minimo) relativo. Teorema di Fermat (zeri della derivata e punti di estremo relativo). Proprietà delle funzioni derivabili su un intervallo: i teoremi di Rolle e di Cauchy. Un'interpretazione geometrica del teorema di Cauchy (cenni). Teorema di Lagrange e formula del valor medio. Funzioni C^1 su un compatto sono Lipschitziane. Funzioni a derivata nulla su un intervallo. Punti critici per una funzione. Media aritmetica e media geometrica. Esempio di funzione derivabile non C^1. Funzioni monotone su un intervallo e segno della derivata. Una condizione sufficiente (non necessaria) per un punto di estremo relativo utilizzando il segno della derivata in un intorno. Studio di una funzione. Le funzioni iperboliche $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$; loro proprietà e formule principali. Il teorema di de L'Hôpital (dimostrazione solo nel caso 0/0). Funzioni asintotiche a $-\infty$ e a $+\infty$. Asintoti orizzontali e obliqui a $-\infty$ e a $+\infty$. Il teorema di caratterizzazione degli asintoti. Applicazioni del teorema di de l'Hôpital al calcolo dei limiti: le "forme indeterminate" $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, 0^∞. Funzioni primitive. Funzioni primitivabili. Il teorema di caratterizzazione delle funzioni primitive su un intervallo. Il teorema sul limite della derivata. Una funzione primitivabile non può avere discontinuità di tipo "salto". Un esempio di funzione derivabile non C^1. Polinomio approssimante n-esimo di una funzione in un punto. Ordini di infinitesimo infrareali. Il lemma di Peano. Un'applicazione al calcolo dell'ordine di infinitesimo di una funzione in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Il teorema di Taylor. Resto nella forma di Peano. Resto nella forma di Lagrange. L'uso del polinomio di Taylor per approssimare il valore di una funzione con valutazione dell'errore. Relazione tra il polinomio di Taylor di f e di f'. Il polinomio di Taylor-Mac Laurin di ordine n delle principali funzioni elementari: e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ (con i casi particolari $\alpha = -1$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$), $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$. Insiemi convessi di $\mathbb{R}^n$. Parametrizzazione del segmento che congiunge due punti. Epigrafico di una funzione. Definizione di funzione convessa su un intervallo. Osservazione fondamentale sulle funzioni convesse (proprietà del "triangolo" delle corde). Esistenza in ogni punto interno a I delle derivate destra e sinistra, monotonia delle derivate destra e sinistra, relazione tra $f'_s(x)$ e $f'_d(x)$, continuità in ogni punto interno a I della funzione. Caratterizzazione delle funzioni derivabili convesse (strettamente convesse) come funzioni la cui derivata è crescente (strettamente crescente). Relazione tra convessità e segno della derivata seconda per una funzione due volte derivabile su un intervallo. Funzioni concave su un intervallo. Convessità e retta tangente. Punto di flesso ascendente e discendente. La derivata seconda si annulla in un punto di flesso.

Test della derivata seconda per i punti di massimo e minimo relativo. Comportamento della derivata di una funzione che ammette limite finito per x tendente a $+\infty$. Varie proprietà delle funzioni convesse.

Calcolo integrale. Il problema della definizione dell'area di una figura piana. Cenni al metodo di esaustione. Decomposizione di un intervallo compatto. Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori di una funzione limitata su un intervallo compatto. Proprietà di confronto tra le somme integrali. Integrale inferiore e integrale superiore di una funzione su un intervallo compatto. Funzione integrabile secondo Riemann su un intervallo compatto. Integrale di una funzione integrabile su un intervallo compatto. Esempio di funzione non integrabile. Teorema di integrabilità delle funzioni monotone. Esempio di calcolo dell'integrale dalla definizione. Teorema di integrabilità delle funzioni continue. Linearità dell'integrale (cenni di dimostrazione). Integrabilità della parte positiva, della parte negativa e del valore assoluto di una funzione integrabile, integrabilità del massimo e minimo di due funzioni integrabili. Trascurabilità degli insiemi finiti nell'integrale di Riemann. Definizione di integrale di una funzione limitata su un intervallo privato di un numero finito di punti. Teorema del confronto per gli integrali (monotonia). Formula sul valore assoluto dell'integrale. Integrabilità del prodotto (senza dimostrazione). Teorema di additività del dominio nell'integrale. Altre applicazioni degli integrali: massa di una barra non omogenea, media di una distribuzione continua. Il teorema della media integrale. Funzioni localmente integrabili su un intervallo. Integrale orientato di una funzione localmente integrabile su un intervallo. Estensione all'integrale orientato delle proprietà dell'integrale: linearità, teorema della media, formula di Chasles. Funzione integrale F_{x_0} di una funzione f con punto iniziale x_0. Il teorema di continuità della funzione integrale. Il teorema fondamentale del calcolo. Le funzioni continue sono primitivabili. La formula di Torricelli-Barrow. Esempio di una funzione integrabile non primitivabile. Esempio di una funzione primitivabile non integrabile. Tabella delle primitive immediate. L'integrale indefinito per funzioni primitivabili definite su un intervallo. Integrazione per linearità. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione. Alcune applicazioni dell'integrazione per sostituzione: integrale di una funzione pari, di una funzione dispari, di una funzione periodica. Integrale delle funzioni $\operatorname{sen}^2(x)$ e $\cos^2(x)$. Metodo di Hermite per la decomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici. Integrazione delle funzioni razionali. Primitive di alcune funzioni riconducibili a integrali di funzioni razionali mediante sostituzioni opportune (sostituzioni "razionalizzanti") $y = \operatorname{sen} x$, $y = e^x$, $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = \operatorname{sen} t$, $x = \cosh t$. Funzioni integrabili in senso generalizzato e integrale generalizzato di una funzione su un intervallo non limitato. Esistenza dell'integrale generalizzato per le funzioni non negative (aut aut). Criteri del confronto e dell'ordine di infinitesimo per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative su intervalli illimitati. Funzioni assolutamente integrabili. L'assoluta integrabilità in senso generalizzato di una funzione localmente integrabile implica l'integrabilità in senso generalizzato. Esempio di funzione integrabile in senso generalizzato ma non assolutamente integrabile (cenni). Integrale generalizzato di una funzione non limitata su un intervallo del tipo $[a, b[$ o $]a, b]$. Aut aut per le funzioni non negative. Criteri del confronto e dell'ordine di infinito per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative non limitate su intervalli del tipo $[a, b[$ o $]a, b]$. Integrali generalizzati su intervalli con più punti di singolarità. Cenni al valor principale di una funzione su $\mathbb{R}$. Derivata di una funzione del tipo $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} h(t)\,dt$. Studio di una funzione definita mediante integrali.

Equazioni differenziali. Esempi di modelli differenziali (pendolo, dinamica di una popolazione, caduta nella gravità). Equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine a coefficienti costanti. Soluzione. Formula risolutiva. Condizioni iniziali. Equazione omogenea e equazione completa. Metodo di somiglianza. Eq. diff. ord. lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzioni dell'equazione omogenea, metodo di somiglianza (cenni).

Testi consigliati P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di analisi matematica (per il diploma universitario)*, Università degli Studi di Trieste, Facoltà di Ingegneria. (Da richiedersi al docente su supporto informatico). Altri testi: M. Conti. D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, *Analisi matematica (dal calcolo all'analisi) Volume 1*, Apogeo; M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, *Matematica. Calcolo infinitesimale e algebra lineare*, Zanichelli; E. Giusti, *Analisi matematica 1*, Bollati Boringhieri (testo classico); J. Stewart, *Calcolo 1 e 2*, Apogeo; R. A. Adams, *Calcolo differenziale 1 e 2* , Casa Editrice Ambrosiana; (impostazione americana).

Alla pagina http://www.dsm.univ.trieste.it/~obersnel potete trovare ulteriori informazioni sul corso, tutti gli esercizi assegnati a lezione, esercizi svolti, compiti assegnati agli esami.