Università di Trieste

Lauree in ingegneria elettronica e informatica e in ingegneria civile e ambientale

Corso di Analisi Matematica 1
Anno Accademico 2021/2022

Prof. Franco Obersnel

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Alcuni richiami sugli insiemi. Appartenenza, inclusione, unione, intersezione, differenza, differenza simmetrica. Prodotto cartesiano, relazioni binarie. Relazioni di equivalenza, proprietà ed esempi. Classi di equivalenza. Insieme quoziente. L'esempio dei numeri razionali. Relazioni d'ordine, proprietà ed esempi. Relazioni d'ordine parziali e totali. L'insieme delle parti di un insieme e la relazione di inclusione. Insiemi ordinati. Limitazioni superiori (maggioranti)/ inferiori (minoranti) di un insieme ordinato. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Insiemi limitati. Insiemi illimitati. Massimo e minimo di un sottoinsieme di un insieme ordinato. Teorema di unicità del minimo (massimo). Estremo superiore / inferiore di un sottoinsieme di un insieme ordinato. Unicità dell'estremo superiore Funzioni. Dominio, codominio, insieme immagine, insieme controimmagine. Grafico di una funzione. Funzioni suriettive, iniettive, biiettive. Funzione inversa. Funzioni composte. Esempi di funzioni: funzione costante, funzione identica, funzione caratteristica, proiezioni. Composizione di una funzione invertibile con la propria inversa. Assiomi di campo. Alcune proprietà algebriche dei campi. Assiomi di campo-ordinato. Esempi di campi finiti ($\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_p$). Alcuni sottoinsiemi di un campo-ordinato: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato in $\mathbb{Q}$ (proprietà di Archimede in $\mathbb{Q}$) e conseguenze. Campi-ordinati completi. $\mathbb{R}$ è un campo-ordinato completo. Insiemi separati. Elemento separatore. Proprietà di continuità (assioma di Dedekind). Irrazionalità della radice quadrata di 2. Insufficienza dei numeri razionali. Esempio di un insieme limitato di $\mathbb{Q}$ per il quale non esiste estremo superiore. $\mathbb{Q}$ è un campo-ordinato ma non è completo. Teorema di caratterizzazione della completezza per un campo-ordinato (l'esistenza dell'estremo superiore (inferiore) di ogni insieme non vuoto superiormente (inferiormente) limitato in $\mathbb{R}$ è equivalente all'esistenza di un elemento separatore per ogni coppia di insiemi separati). $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato in $\mathbb{R}$ e corollari (proprietà di Archimede in $\mathbb{R}$). Teorema della densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Numeri irrazionali. Densità di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Insiemi contingui. Unicità dell'elemento separatore tra insiemi contigui. Teorema di caratterizzazione degli insiemi contigui in $\mathbb{R}$. Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore (inferiore) in $\mathbb{R}$.

I numeri naturali e il calcolo combinatorio. Proprietà fondamentali (assiomi di Peano). Il principio di induzione (formulazione insiemistica e formulazione logica). Esempi di verifiche utilizzando il principio di induzione. La disuguaglianza di Bernoulli. Le formule per le somme $1+2+\ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$ e $1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ con $x \in \mathbb{R}$. Esempi di definizioni per ricorrenza. La potenza a^n con $a \in \mathbb{R}$. Il fattoriale $n!$. Successioni di elementi di un insieme. Esempi. La successione di Fibonacci. La successione $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ dove $(x_n)_n$ è la successione di Fibonacci. Il modulo aureo. Calcolo combinatorio. Permutazioni di un insieme. Il fattoriale di n. Il numero delle possibili permutazioni di un insieme di n elementi (senza e con ripetizioni). Il numero delle biiezioni $f : A \to B$ con $|A| = |B| = n$. Disposizioni e disposizioni con ripetizione a k a k di un insieme di n elementi. Combinazioni a k a k di un insieme di n elementi. Il numero delle possibili disposizioni (eventualmente con ripetizione) e combinazioni a k a k di un insieme di n elementi. Coefficienti binomiali e alcune loro proprietà. La formula di Stifel e il triangolo di Tartaglia. La formula del binomio di Newton.

Funzioni elementari. La funzione valore assoluto. Il modulo nel campo complesso $\mathbb{C}$. Interpretazione come distanza. Palla-aperta di centro un numero reale (o complesso) e raggio un numero reale positivo. Descrizione di una palla-aperta in $\mathbb{R}$ mediante il valore assoluto. Proprietà del valore assoluto in $\mathbb{R}$ e del modulo in $\mathbb{C}$. Equazioni e disequazioni con il valore assoluto. Funzioni. Grafico di una funzione. Le funzioni costanti. La funzione identica. La funzione di Dirichlet. Le notazioni $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$. Funzioni limitate e illimitate. Massimo, minimo, estremi superiore e inferiore di una funzione. Funzioni pari e dispari. Algebra delle funzioni reali. Funzione somma, funzione prodotto, funzione quoziente. Funzioni polinomiali e funzioni razionali. Funzioni composte. Funzione restrizione. Funzioni inverse. Funzioni monotone (strettamente crescenti/decrescenti, debolmente crescenti/decrescenti). La funzione parte intera. La funzione potenza di esponente naturale. Proprietà algebriche e proprietà analitiche della funzione potenza di esponente naturale. Teorema di esistenza della radice ennesima (dimostrazione richiesta per il caso $n = 3$).

La funzione radice ennesima e le sue proprietà. Le potenze di esponente intero e razionale e le loro proprietà analitiche e algebriche. Lemma sulla continuità dell'esponenziale in 0 (per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n tale che $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$). La potenza di esponente reale. Proprietà algebriche delle potenze di esponente reale (senza dimostrazione). La funzione esponenziale a^x, con $a > 0$, e le sue proprietà analitiche. La funzione logaritmo e le sue proprietà algebriche e analitiche. Cenni all'uso dei logaritmi, le scale logaritmiche, il regolo calcolatore. Funzioni periodiche, periodo, periodo minimo. La funzione mantissa. Misura di un angolo in radianti. Curva parametrizzata in $\mathbb{R}^2$. La parametrizzazione del cerchio. Le funzioni circolari seno, coseno e le loro proprietà principali. Relazioni fondamentali tra funzioni circolari. Angoli significativi. Formule di addizione di seno e coseno (dimostrazione vista per il seno). Cenni alle formule di Werner e di prostaferesi (non è richiesto di ricordarle a memoria, ma di saperle ricavare). La funzione tangente e il suo significato geometrico. Le funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente e loro proprietà. Combinazioni lineari in seno e coseno e riduzione alla forma $A\sin(\omega x + \varphi)$. Studio analitico di una funzione: la convenzione sul dominio, segni, limitatezza, simmetrie, monotonia. Studio di grafici di funzioni ottenute mediante traslazioni, dilatazioni o composizione con il valore assoluto di una funzione nota. Cenni ai polinomi e funzioni polinomiali: divisione tra polinomi, polinomi riducibili e polinomi irriducibili, zeri di un polinomio, molteplicità di uno zero, teorema di Cartesio-Ruffini, teorema fondamentale dell'algebra, principio di identità dei polinomi (senza dimostrazioni). Esempi di espressioni analitiche e grafici corrispondenti.

Successioni di numeri reali. Successioni di numeri reali. Successioni limitate/illimitate. Successioni monotone. Proprietà verificate definitivamente. Intorni di un numero reale, di $-\infty$ e di $+\infty$. Definizione di limite finito di una successione di numeri reali. Successioni convergenti. Successioni divergenti. Limite $+\infty$ o $-\infty$ di una successione di numeri reali. Definizione di limite di una successione usando la nozione di intorno. Teorema di limitatezza di una successione convergente e illimitatezza di una successione divergente. Proprietà di separazione di Hausdorff degli intorni. Teorema di unicità del limite di una successione. Sottosuccessioni. Teorema sul limite delle sottosuccessioni e un criterio per la non esistenza del limite di una successione. Teorema di esistenza del limite di una successione monotona. Il teorema del confronto per i limiti di successioni. Il teorema dei due carabinieri per le successioni. Il teorema sul limite della somma di due successioni. Il teorema sul limite della combinazione lineare. Il teorema sul limite della successione reciproca $\left(\frac{1}{x_n}\right)_n$. Convergenza al numero aureo ϕ della successione $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ dove $(x_n)_n$ è la successione di Fibonacci. La successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$: limitatezza e crescenza, il numero e di Nepero. Rappresentazione in base B di un numero reale. Differenza nella rappresentazione tra un numero razionale e un numero irrazionale. Il Teorema di Bolzano-Weierstrass (esistenza di una sottosuccessione convergente di una successione limitata): il metodo di bisezione. Esistenza di una sottosuccessione divergente estratta da una successione illimitata.

Limiti di funzioni reali e funzioni continue. Limite per x che tende a $-\infty$ o a $+\infty$ di una funzione $f(x)$. La necessità di definire il limite per x che tende a un numero reale. Punti di accumulazione di un insieme. Punti di accumulazione e limiti di una successione. Punti isolati di un insieme. Insiemi discreti. Insiemi chiusi. Chiusura di un insieme. Insiemi compatti in $\mathbb{R}$ (come chiusi e limitati). Un insieme compatto ha sempre massimo e minimo. Teorema di caratterizzazione degli insiemi compatti di $\mathbb{R}$ mediante le successioni. Insiemi limitati e infiniti ed esistenza di punti di accumulazione. Limite per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ di una funzione $f(x)$ (definizione generale con gli intorni). Definizioni esplicite nei casi del limite finito, limite $-\infty$, limite $+\infty$. Caratterizzazione del limite di una funzione mediante le successioni. Teorema sul limite della combinazione lineare. Teorema di unicità del limite. Teorema sul limite della restrizione. Un criterio per stabilire la non esistenza del limite. Limiti destri e sinistri. Il limite esiste se e solo se esistono e sono uguali limite destro e sinistro. Teorema della limitatezza locale. Funzioni discoste da zero. Teorema della permanenza del segno per i limiti. Teoremi sul limite del prodotto. Teoremi sul limite della funzione reciproca e della funzione quoziente. Teoremi di confronto dei limiti. Teorema dei "due carabinieri". Teorema sul limite delle funzioni monotone. Funzioni continue in un punto. Funzioni continue a destra e a sinistra. Funzioni continue su un insieme. Continuità delle funzioni somma, prodotto, quoziente. Continuità della funzione composta. Continuità delle funzioni razionali. Proprietà locale di Lipischitz in un punto e continuità delle funzioni che soddisfano tale proprietà. Continuità del valore assoluto. Continuità delle funzioni circolari (seno, coseno, tangente). Continuità delle funzioni esponenziali. Continuità della funzione inversa di una funzione monotona definita su un intervallo. Esempio di funzione continua con inversa non continua. Continuità delle funzioni logaritmo, delle funzioni circolari inverse, delle radici. Limiti a $x_0 \in \mathbb{R}$, e a $\pm\infty$ delle funzioni razionali. Teorema sul limite delle funzioni composte.

Sostituzione della variabile nel calcolo di un limite. Diverse tecniche per il calcolo dei limiti. I "limiti notevoli" $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^\alpha-1}{x}$. Comportamento delle funzioni a infinito: confronti asintotici, funzioni infinite e ordini di infinito. Funzioni infinite soprareali e sottoreali a $+\infty$. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^\alpha}$, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\alpha}$, $\lim_{x\to 0} x^\alpha \log_a x$, $\lim_{x\to-\infty}|x|^\alpha a^x$. I teoremi fondamentali sulle funzioni continue. Il teorema di esistenza degli zeri (di Bolzano) e il metodo di bisezione. Il teorema di connessione. Alcune applicazioni alla risoluzione di un'equazione. Massimi e minimi di una funzione. Il teorema di Weierstrass. Funzioni uniformemente continue. Il teorema di Heine-Cantor.

Calcolo differenziale. Il problema delle tangenti. Secante passante per due punti di un curva. Coefficiente angolare. Incremento. Rapporto incrementale di una funzione relativamente a due punti. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della secante il grafico. La velocità, l'intensità di corrente, l'inflazione, la pendenza. Derivata di una funzione in un punto. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della tangente il grafico. Equazione della retta tangente. Funzione derivabile in un punto. La funzione derivata. Derivate di ordine n. Derivata delle funzioni $f(x)=mx+q$, $f(x)=x^2$, $f(x)=a^x$ con $a>0$, $f(x)=\log_a(x)$, con $a>0$ e $a\neq 1$, $f(x)=|x|$. Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto. Derivata delle funzioni $\sqrt{x}$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$. Teorema di continuità delle funzioni derivabili. L'esistenza della derivata nel punto non è sufficiente per garantire la continuità. Derivata della funzione composta. Teorema sulla derivata della combinazione lineare. Gli spazi vettoriali $\mathcal{C}^0(E)$, $\mathcal{C}^1(E)$ e $\mathcal{C}^n(E)$. Gli operatori lineari $D:\mathcal{C}^1(E)\to\mathcal{C}^0(E)$ e $D^k:\mathcal{C}^n(E)\to\mathcal{C}^{n-k}(E)$. Derivata del prodotto. Derivata delle funzioni $f(x)=x^n$ con $n\in\mathbb{N}$ e $f(x)=x^\alpha$ con $\alpha\in\mathbb{R}$. Derivata della funzione reciproca e del quoziente. Derivata della funzione $f(x)=\operatorname{tg} x$. Derivata della funzione inversa. Osservazioni sulla formula della derivata della funzione inversa. Derivata delle funzioni radice $n-$esima, dei logaritmi, delle funzioni circolari inverse. L'equazione del pendolo. Modello lineare di un problema. Approssimante lineare di una funzione in un punto. Funzioni differenziabili. Teorema di esistenza dell'approssimante lineare. Differenziale di una funzione in un punto. Formula di Taylor del primo ordine. o piccolo di Landau. Punti di estremo (massimo, minimo) relativo. Teorema di Fermat (zeri della derivata e punti di estremo relativo). Funzioni monotone su un intervallo e segno della derivata. Proprietà delle funzioni derivabili su un intervallo: i teoremi di Rolle e di Cauchy. Un'interpretazione geometrica del teorema di Cauchy. Teorema di Lagrange e formula del valor medio. Funzioni a derivata nulla su un intervallo. Studio di una funzione. Punti critici per una funzione. Una condizione sufficiente per un punto di estremo relativo utilizzando il segno della derivata in un intorno. Funzioni asintotiche. Asintoti orizzontali e obliqui a $-\infty$ e a $+\infty$. Un teorema sulla ricerca degli asintoti. Asintoti verticali in un punto. Il teorema di de L'Hôpital (dimostrazione solo nel caso $0/0$). Applicazioni del teorema di de l'Hôpital al calcolo dei limiti: le "forme indeterminate" $0/0$, ∞/∞, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, 0^∞. Le funzioni iperboliche $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$ e $\operatorname{tgh} x$; loro proprietà e formule principali. Funzioni primitive. Funzioni primitivabili. Il teorema sul limite della derivata. Una funzione primitivabile non può avere discontinuità di tipo "salto". Un esempio di funzione derivabile non C^1. Funzioni infinite e funzioni infinitesime in un punto. Ordine di infinito (infinitesimo); confronto tra ordini di infinito (infinitesimo). Ordini di infinito (infinitesimo) reali, soprareali, sottoreali, infrareali. Il lemma di Peano. Un'applicazione al calcolo dell'ordine di infinitesimo di una funzione in un punto $x_0\in\mathbb{R}$. Polinomio approssimante n-esimo di una funzione in un punto. Teorema di Taylor. Resto nella forma di Peano. Resto nella forma di Lagrange. L'uso del polinomio di Taylor per approssimare il valore di una funzione con valutazione dell'errore. Relazione tra il polinomio di Taylor di f e di f'. Il polinomio di Taylor-Mac Laurin di ordine n delle principali funzioni elementari: e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ (con i casi particolari $\alpha=-1$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$), $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$. I polinomi di Taylor di una funzione non individuano univocamente una funzione C^∞. Insiemi convessi di $\mathbb{R}^n$. Parametrizzazione del segmento che congiunge due punti. Epigrafico di una funzione. Definizioni di funzione convessa e di funzione concava su un intervallo. Proprietà delle funzioni convesse su un intervallo I: monotonia per ogni $x_0\in I$ della funzione rapporto incrementale $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, esistenza in ogni punto interno a I delle derivate destra e sinistra, monotonia delle derivate destra e sinistra, relazione tra $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$, continuità in ogni punto interno a I della funzione. Caratterizzazione delle funzioni derivabili convesse (strettamente convesse) come funzioni la cui derivata è crescente (strettamente crescente). Relazione tra convessità e segno della derivata seconda per una funzione due volte derivabile su un intervallo. Convessità e retta tangente. Punto di flesso ascendente e discendente. La derivata seconda si annulla in un punto di flesso. Test della derivata seconda per i punti di massimo e minimo relativo. Comportamento della derivata di una funzione che ammette limite finito per x tendente a $+\infty$. Varie proprietà delle funzioni convesse.

Calcolo integrale. Il problema della definizione dell'area di una figura piana. Cenni al metodo di esaustione. Decomposizione di un intervallo compatto. Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori di una funzione limitata su un intervallo compatto. Proprietà di confronto tra le somme integrali. Integrale inferiore e integrale superiore di una funzione su un intervallo compatto. Funzione integrabile secondo Riemann su un intervallo compatto. Integrale di una funzione integrabile su un intervallo compatto. Esempio di funzione non integrabile. Teorema di integrabilità delle funzioni monotone. Esempio di calcolo dell'integrale dalla definizione. Teorema di integrabilità delle funzioni continue. Linearità dell'integrale. Integrabilità della parte positiva, della parte negativa e del valore assoluto di una funzione integrabile, integrabilità del massimo e minimo di due funzioni integrabili. Trascurabilità degli insiemi finiti nell'integrale di Riemann. Definizione di integrale di una funzione limitata su un intervallo privato di un numero finito di punti. Teorema del confronto per gli integrali (monotonia). Formula sul valore assoluto dell'integrale. Integrabilità del prodotto (senza dimostrazione). Teorema di additività del dominio nell'integrale (cenni di dimostrazione). Altre applicazioni degli integrali: massa di una barra non omogenea, media di una distribuzione continua. Il teorema della media integrale. Funzioni localmente integrabili su un intervallo. Integrale orientato di una funzione localmente integrabile su un intervallo. Estensione all'integrale orientato delle proprietà dell'integrale: linearità, teorema della media, formula di Chasles. Funzione integrale F_{x_0} di una funzione f con punto iniziale x_0. Il teorema di continuità della funzione integrale. Il teorema fondamentale del calcolo. Le funzioni continue sono primitivabili. Caratterizzazione delle funzioni primitive su un intervallo. La formula di Torricelli-Barrow. Esempio di una funzione integrabile non primitivabile. Esempio di una funzione primitivabile non integrabile. Tabella delle primitive immediate. L'integrale indefinito per funzioni primitivabili definite su un intervallo. Integrazione per linearità. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione. Alcune applicazioni dell'integrazione per sostituzione: integrale di una funzione pari, di una funzione dispari, di una funzione periodica. Integrale delle funzioni $\operatorname{sen}^2(x)$ e $\cos^2(x)$. Metodo di Hermite per la decomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici. Integrazione delle funzioni razionali. Primitive di alcune funzioni riconducibili a integrali di funzioni razionali mediante sostituzioni opportune (sostituzioni "razionalizzanti") $y = e^x$, $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = \operatorname{sen} t$, $x = \cosh t$. Derivata di una funzione del tipo $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\,dt$. Studio di una funzione definita mediante integrali. Funzioni integrabili in senso generalizzato e integrale generalizzato di una funzione su un intervallo non limitato. Esistenza dell'integrale generalizzato per le funzioni non negative (aut aut). Criteri del confronto e dell'ordine di infinitesimo per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative su intervalli illimitati. Funzioni assolutamente integrabili. L'assoluta integrabilità in senso generalizzato di una funzione localmente integrabile implica l'integrabilità in senso generalizzato. Esempio di funzione integrabile in senso generalizzato ma non assolutamente integrabile (cenni). Integrale generalizzato di una funzione non limitata su un intervallo del tipo $[a, b[$ o $]a, b]$. Aut aut per le funzioni non negative. Criteri del confronto e dell'ordine di infinito per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative non limitate su intervalli del tipo $[a, b[$ o $]a, b]$. Integrali generalizzati su intervalli con più punti di singolarità. Valor principale di una funzione su un intervallo.

Testi consigliati

P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di analisi matematica (per il diploma universitario)*, Università degli Studi di Trieste, Facoltà di Ingegneria. (Da richiedersi al docente su supporto informatico).

Altri testi: M. Conti. D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, *Analisi matematica (dal calcolo all'analisi) Volume 1*, Apogeo; M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, *Matematica. Calcolo infinitesimale e algebra lineare*, Zanichelli; E. Giusti, *Analisi matematica 1*, Bollati Boringhieri (testo classico); J. Stewart, *Calcolo 1 e 2*, Apogeo; R. A. Adams, *Calcolo differenziale 1 e 2* , Casa Editrice Ambrosiana; (impostazione americana).

Alla pagina http://www.dsm.univ.trieste.it/˜obersnel potete trovare ulteriori informazioni sul corso, tutti gli esercizi assegnati a lezione, esercizi svolti, compiti assegnati agli esami.