Università di Trieste

Lauree in ingegneria elettronica e informatica e in ingegneria civile e ambientale

Corso di Analisi Matematica 1
Anno Accademico 2017/2018

Prof. Franco Obersnel

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Alcuni richiami sugli insiemi. Appartenenza, inclusione, unione, intersezione, differenza, differenza simmetrica, prodotto cartesiano, insieme delle parti di un insieme. Relazioni binarie. Relazioni di equivalenza, proprietà ed esempi. Relazioni d'ordine, proprietà ed esempi. Relazioni d'ordine parziali e totali. Insiemi ordinati. Massimo e minimo di un sottoinsieme di un insieme ordinato. Teorema di unicità del minimo (massimo). Funzioni. Dominio, codominio, insieme immagine, insieme controimmagine. Grafico di una funzione. Esempi di funzioni: funzione costante, funzione identica, funzione caratteristica, proiezioni, operazioni. Funzioni suriettive, iniettive, biiettive. Funzione inversa. Funzioni composte. Assiomi di campo. Alcune proprietà algebriche dei campi. Assiomi di campo-ordinato. Esempi di campi finiti ($\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$). Alcuni sottoinsiemi di un campo-ordinato: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Limitazioni superiori (inferiori) di un insieme ordinato. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Insiemi limitati. Insiemi illimitati. Estremo superiore ed estremo inferiore di un sottoinsieme limitato in un insieme ordinato. Teorema di unicità dell'estremo superiore. Relazione tra $\sup A$ e $\max A$. $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato in $\mathbb{Q}$ (proprietà di Archimede in $\mathbb{Q}$). Irrazionalità della radice quadrata di 2. Insufficienza dei numeri razionali. Esempio di un insieme limitato di $\mathbb{Q}$ per il quale non esiste estremo superiore. Insiemi separati. Elemento separatore. Esempio di insiemi separati in $\mathbb{Q}$ che non hanno elemento separatore. Proprietà di continuità (assioma di Dedekind). Campi-ordinati completi. $\mathbb{R}$ è un campo-ordinato completo. $\mathbb{Q}$ è un campo-ordinato ma non è completo. Teorema di caratterizzazione della completezza per un campo-ordinato (l'esistenza dell'estremo superiore (inferiore) di ogni insieme non vuoto superiormente (inferiormente) limitato in $\mathbb{R}$ è equivalente all'esistenza di un elemento separatore per ogni coppia di insiemi separati). $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato in $\mathbb{R}$ (proprietà di Archimede in $\mathbb{R}$). Teorema della densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Numeri irrazionali. Densità di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore (inferiore) in $\mathbb{R}$. Insiemi contingui. Unicità dell'elemento separatore tra insiemi contigui. Teorema di caratterizzazione degli insiemi contigui in $\mathbb{R}$. Le notazioni $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$. Intervalli di $\mathbb{R}$.

I numeri naturali e il calcolo combinatorio. Proprietà fondamentali (assiomi di Peano). Il principio di induzione. Successioni. Esempi di definizioni per ricorrenza. La successione di Fibonacci. Esempi di verifiche utilizzando il principio di induzione. La progressione aritmetica e la progressione geometrica. Calcolo combinatorio. Permutazioni di un insieme. Il fattoriale di n. Il numero delle possibili permutazioni di un insieme di n elementi. Disposizioni e combinazioni di classe k di un insieme di n elementi. Il numero delle possibili disposizioni e combinazioni di classe k di un insieme di n elementi. Coefficienti binomiali e alcune loro proprietà. La formula di Stifel e il triangolo di Tartaglia. La formula del binomio di Newton.

Funzioni elementari. Funzioni. Grafico di una funzione. Le funzioni costanti. La funzione identica. La funzione valore assoluto. La funzione di Dirichlet. Proprietà del valore assoluto. Palla aperta di centro un numero reale e raggio un numero reale positivo. Funzioni limitate e illimitate. Massimo, minimo, estremi superiore ed inferiore di una funzione. Funzioni monotone (strettamente crescenti/decrescenti, debolmente crescenti/decrescenti). La funzione parte intera. Algebra delle funzioni reali. Funzione somma, funzione prodotto, funzione quoziente. Funzioni polinomiali e funzioni razionali. Funzioni composte. Funzione restrizione. Funzioni inverse. Funzioni pari e dispari. La funzione potenza di esponente naturale. Proprietà analitiche della funzione potenza di esponente naturale. Teorema di esistenza della radice ennesima. La funzione radice ennesima e le sue proprietà. Le potenze di esponente intero e razionale e le loro proprietà analitiche e algebriche. La potenza di esponente reale (la dimostrazione dell'uguaglianza tra inf e sup nella definizione è facoltativa). Proprietà algebriche delle potenze di esponente reale (senza dimostrazione). La funzione esponenziale a^x, con $a > 0$, e le sue proprietà. La funzione logaritmo e le sue proprietà algebriche e analitiche. Funzioni periodiche, periodo, periodo minimo. La funzione mantissa. Misura di un angolo in radianti. La parametrizzazione del cerchio. Le funzioni circolari seno, coseno, e le loro proprietà. Relazioni fondamentali tra funzioni circolari. Angoli significativi. Formule di addizione di seno e coseno. Cenni alle formule di Werner e di prostaferesi (non è richiesto di ricordarle a memoria, ma di saperle ricavare).

La funzione tangente e le sue proprietà. Le funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente e loro proprietà. Combinazioni lineari in seno e coseno e riduzione alla forma $A\sin(\omega x+\varphi)$. Studio di grafici di funzioni ottenute mediante traslazioni, dilatazioni o composizione con il valore assoluto di una funzione nota. Funzioni "oscillanti" del tipo $e^{-x}\mathrm{sen}\,x$. Polinomi e funzioni polinomiali. Divisione tra polinomi. Polinomi riducibili e polinomi irriducibili. Zeri di un polinomio. Molteplicità di uno zero. Teorema di Cartesio-Ruffini. Principio di identità dei polinomi.

Successioni di numeri reali. Successioni di numeri reali. La successione di Fibonacci. La successione $y_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}$ dove $(x_n)_n$ è la successione di Fibonacci. il modulo aureo. Successioni limitate. Successioni monotone. Proprietà verificate definitivamente. Definizione di limite finito di una successione di numeri reali. Successioni convergenti. Successioni divergenti. Limite $+\infty$ o $-\infty$ di una successione di numeri reali. Sottosuccessioni. Teorema di unicità del limite. Toerema sul limite delle sottosuccessioni e un criterio per la non esistenza del limite di una successione. Teorema di limitatezza delle successioni convergenti. Successioni illimitate e sottosuccessioni divergenti. Intorni di un numero reale, di $-\infty$ e di $+\infty$. Definizione di limite di una successione usando la nozione di intorno. Teorema di esistenza del limite di una successione monotona. La successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è limitata. La successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente (dimostrazione facoltativa). Il numero e di Nepero. Il limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Rappresentazione in base B di un numero reale (cenni). Il Teorema di Bolzano-Weierstrass (esistenza di una sottosuccessione convergente di una successione limitata; dimostrazione facoltativa). Esistenza di una sottosuccessione divergente estratta da una successione illimitata.

Limiti di funzioni reali e funzioni continue. Proprietà degli intorni. Limite per x che tende a $-\infty$ o a $+\infty$ di una funzione $f(x)$. Punti di accumulazione di un insieme. Punti di accumulazione e limiti di una successione. Chiusura di un insieme. Insiemi chiusi. Insiemi compatti. Un insieme compatto ha sempre massimo e minimo. Teorema di caratterizzazione degli insiemi compatti di $\mathbb{R}$ mediante le successioni. Limite per x che tende a $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ di una funzione $f(x)$ (definizione generale con gli intorni). Definizioni esplicite nei casi del limite finito, limite $-\infty$, limite $+\infty$. Teorema di unicità del limite. Teorema sul limite della restrizione. Un criterio per stabilire la non esistenza del limite. Limiti destri e sinistri. Il limite esiste se e solo se esistono e sono uguali limite destro e sinistro. Funzioni discoste da zero. Proprietà verificate localmente in un punto. Teorema della limitatezza locale. Teorema della permanenza del segno per i limiti. Teoremi sul limite della somma. Teoremi sul limite del prodotto. Teoremi sul limite della funzione reciproca e della funzione quoziente. Limiti a $x_0\in\mathbb{R}$, e a $\pm\infty$ delle funzioni razionali. Funzioni continue in un punto. Funzioni continue su un insieme. Continuità delle funzioni somma, prodotto, quoziente. Continuità della funzione composta di funzioni continue. Continuità delle funzioni razionali. Continuità del valore assoluto. Continuità delle funzioni esponenziali. Continuità delle funzioni circolari (seno, coseno, tangente). Continuità della funzione inversa di una funzione monotona definita su un intervallo. Continuità delle funzioni potenza, delle funzioni logaritmo, delle funzioni circolari inverse, delle radici. Funzioni continue a destra e a sinistra. Teorema sul limite delle funzioni monotone. Teorema sul limite delle funzioni composte. Teoremi di confronto dei limiti. Teorema dei "due carabinieri". I "limiti notevoli" $\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^\alpha-1}{x}$. I "confronti asintotici" $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}$, $\lim_{x\to0}x^\alpha\log_a x$, $\lim_{x\to-\infty}|x|^\alpha a^x$. Diverse tecniche per il calcolo dei limiti. I teoremi fondamentali sulle funzioni continue. Teorema di esistenza degli zeri (di Bolzano) e il metodo di bisezione. Teorema di connessione. Alcune applicazioni nella risoluzione di un'equazione. Teorema di Weierstrass. Funzioni uniformemente continue. Teorema di Heine-Cantor.

Calcolo differenziale. Il problema delle tangenti. Secante passante per due punti di un curva. Coefficiente angolare. Incremento. Rapporto incrementale di una funzione relativamente a due punti. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della secante il grafico. La velocità, l'intensità di corrente, l'inflazione. Derivata di una funzione in un punto. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della tangente il grafico. Equazione della retta tangente. Funzione derivabile in un punto. La funzione derivata. Derivate di ordine n. Derivata delle funzioni $f(x)=mx+q$, $f(x)=x^2$, $f(x)=a^x$ con $a>0$, $f(x)=\log_a(x)$, con $a>0$ e $a\neq1$, $f(x)=|x|$. Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto. Derivata delle funzioni $\sqrt{x}$, $\mathrm{sen}\,x$, $\cos x$. Teorema di continuità delle funzioni derivabili. L'esistenza della derivata nel punto non è sufficiente per garantire la continuità. Regole di derivazione. Teorema sulla derivata della combinazione lineare. Gli spazi vettoriali $\mathcal{C}^0(E)$, $\mathcal{C}^1(E)$ e $\mathcal{C}^n(E)$. Gli operatori lineari $D : \mathcal{C}^1(E) \to \mathcal{C}^0(E)$ e $D^k : \mathcal{C}^n(E) \to \mathcal{C}^{n-k}(E)$. Derivata del prodotto. Derivata della funzione reciproca e del quoziente. Derivata della funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa. Osservazioni sulla formula della derivata della funzione inversa. Derivate delle funzioni radice $n-$esima, dei logaritmi, delle funzioni circolari inverse. L'equazione del pendolo. Modello lineare di un problema. Approssimante lineare di una funzione in un punto. Funzioni differenziabili. Teorema di esistenza dell'approssimante lineare. Differenziale di una funzione in un punto. Punti di estremo (massimo, minimo) relativo. Teorema di Fermat (zeri della derivata e punti di estremo relativo). Considerazioni sulla ricerca dei punti di estremo. Proprietà delle funzioni derivabili su un intervallo: i teoremi di Rolle e di Cauchy. Rappresentazione parametrica di una curva piana. Un'interpretazione geometrica del teorema di Cauchy. Teorema di Lagrange e formula del valor medio. Media aritmetica e media geometrica. Funzioni a derivata nulla su un intervallo. Punti interni di un insieme. Punti di frontiera (di bordo). Insiemi aperti. Punti critici per una funzione. Funzioni monotone su un intervallo e segno della derivata. Una condizione sufficiente per un punto di estremo relativo utilizzando il segno della derivata in un intorno. Studio di una funzione. Le funzioni iperboliche $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$, loro proprietà e formule principali. Funzioni asintotiche. Asintoti orizzontali e obliqui a $-\infty$ e a $+\infty$. Un teorema sulla ricerca degli asintoti. Asintoti verticali in un punto. Il teorema di de L'Hôpital (dimostrazione solo nel caso 0/0). Applicazioni del teorema di de l'Hôpital al calcolo dei limiti: le "forme indeterminate" $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, 0^∞. Funzioni primitive. Funzioni primitivabili. Il teorema sul limite della derivata. Una funzione primitivabile non può avere discontinuità di tipo "salto". Funzioni infinite e funzioni infinitesime in un punto. Ordine di infinito (infinitesimo); confronto tra ordini di infinito (infinitesimo). Ordini di infinito (infinitesimo) reali, soprareali, sottoreali, infrareali. o piccolo di Landau. Il lemma di Peano. Un'applicazione al calcolo dell'ordine di infinitesimo di una funzione in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Polinomio approssimante n-esimo di una funzione in un punto. Teorema di Taylor. Resto nella forma di Peano. Resto nella forma di Lagrange (dimostrazione facoltativa). L'uso del polinomio di Taylor per approssimare il valore di una funzione con valutazione dell'errore. Il polinomio di Taylor-Mac Laurin di ordine n delle principali funzioni elementari: e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$. Insiemi convessi di $\mathbb{R}^n$. Sopragrafico di una funzione. La funzione $\varphi_{(x_1,x_2)}$ che descrive la corda del grafico di una funzione. Funzioni convesse e funzioni concave su un intervallo. Proprietà delle funzioni convesse su un intervallo I: monotonia per ogni $x_0 \in I$ della funzione rapporto incrementale $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, esistenza in ogni punto interno ad I delle derivate destra e sinistra, continuità in ogni punto interno ad I della funzione, monotonia delle derivate destra e sinistra. Caratterizzazione delle funzioni derivabili convesse (strettamente convesse) come funzioni la cui derivata è crescente (strettamente crescente). Relazione tra convessità e segno della derivata seconda per una funzione due volte derivabile su un intervallo. Convessità e retta tangente. Punto di flesso ascendente e discendente. La derivata seconda si annulla in un punto di flesso. Test della derivata seconda per i punti di massimo e minimo relativo. Comportamento della derivata di una funzione che ammette limite finito per x tendente a $+\infty$.

Calcolo integrale. Il problema della definizione dell'area di una figura piana. Alcune motivazioni per l'introduzione dell'integrale: massa, baricentro, media. Decomposizione di un intervallo compatto. Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori di una funzione limitata su un intervallo compatto. Proprietà di confronto tra le somme integrali. Integrale inferiore e integrale superiore di una funzione su un intervallo. Funzione integrabile secondo Riemann su un intervallo compatto. Integrale di una funzione integrabile su un intervallo compatto. Esempio di funzione non integrabile. Esempio di calcolo dell'integrale dalla definizione. Teorema di integrabilità delle funzioni monotone. Teorema di integrabilità delle funzioni continue. Trascurabilità degli insiemi finiti nell'integrale di Riemann. Alcune proprietà dell'integrale di Riemann: linearità dell'operatore integrale (cenni di dimostrazione), integrabilità del prodotto (senza dimostrazione), monotonia dell'operatore integrale, integrabilità del valore assoluto, della parte positiva e della parte negativa di una funzione, teorema di additività del dominio nell'integrale (cenni di dimostrazione), teorema della media integrale. Funzioni localmente integrabili su un intervallo. Integrale orientato di una funzione localmente integrabile su un intervallo. Formula di Chasles. Teorema della media per l'integrale orientato. Funzione integrale F_{x_0} di una funzione f con punto iniziale x_0. Il teorema di continuità della funzione integrale. Il teorema fondamentale del calcolo. Le funzioni continue sono primitivabili. Esempio di una funzione primitivabile non integrabile e di una funzione integrabile non primitivabile. Caratterizzazione delle funzioni primitive su un intervallo. Tabella delle primitive immediate.

La formula di Torricelli Barrow. Integrazione per linearità, per parti e per sostituzione. L'integrale indefinito per funzioni primitivabili definite su un intervallo. Alcune applicazioni dell'integrazione per sostituzione: integrale di una funzione pari, di una funzione dispari, di una funzione periodica. Integrale delle funzioni $\operatorname{sen}^2(x)$ e $\cos^2(x)$. Esempi di cambi di variabile particolari ($\operatorname{sen} x$, $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$). Metodo di Hermite per la decomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici. Integrazione delle funzioni razionali. Primitive di alcune funzioni riconducibili ad integrali di funzioni razionali mediante sostituzioni opportune (sostituzioni "razionalizzanti"). Derivata di una funzione del tipo $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\, dt$. Studio di una funzione definita mediante integrali. Funzioni integrabili in senso generalizzato e integrale generalizzato di una funzione su un intervallo non limitato. Aut aut per la convergenza dell'integrale delle funzioni non negative. Criteri del confronto e dell'ordine di infinitesimo per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative su intervalli illimitati. Funzioni assolutamente integrabili. L'assoluta integrabilità in senso generalizzato di una funzione localmente integrabile implica l'integrabilità in senso generalizzato. Esempio di funzione integrabile in senso generalizzato ma non assolutamente integrabile. Integrale generalizzato di una funzione non limitata su un intervallo del tipo $[a, b[$ o $]a, b]$. Aut aut per la convergenza dell'integrale delle funzioni non negative. Criteri del confronto e dell'ordine di infinito per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative non limitate su intervalli del tipo $[a, b[$ o $]a, b]$. Integrali generalizzati su intervalli con più punti di singolarità. Valor principale di una funzione su un intervallo.

Testi consigliati

P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di analisi matematica (per il diploma universitario)*, Università degli Studi di Trieste, Facoltà di Ingegneria. (Da richiedersi al docente su supporto informatico).

Altri testi: M. Conti. D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, *Analisi matematica (dal calcolo all'analisi) Volume 1*, Apogeo; M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, *Matematica. Calcolo infinitesimale e algebra lineare*, Zanichelli; E. Giusti, *Analisi matematica 1*, Bollati Boringhieri (testo classico); J. Stewart, *Calcolo 1 e 2*, Apogeo; R. A. Adams, *Calcolo differenziale 1 e 2* , Casa Editrice Ambrosiana; (impostazione americana).

Alla pagina http://www.dsm.univ.trieste.it/˜obersnel potete trovare ulteriori informazioni sul corso, tutti gli esercizi assegnati a lezione, esercizi svolti, compiti assegnati agli esami.