

## Università di Trieste

### Lauree in ingegneria elettronica e informatica e in ingegneria civile e ambientale

Corso di Analisi Matematica 1

Anno Accademico 2015/2016

Prof. Franco Obersnel

**L'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali.** Alcuni richiami sugli insiemi. Relazioni binarie di equivalenza, d'ordine, funzioni. Assiomi di campo. Alcune proprietà algebriche dei campi. Assiomi di campo ordinato. Esempi di campi finiti ( $\mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_3$ ). Alcuni sottoinsiemi di un campo ordinato:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ .  $\mathbb{N}$  è superiormente illimitato in  $\mathbb{Q}$  (proprietà di Archimede in  $\mathbb{Q}$ ). Minimo e massimo di un insieme ordinato. Unicità del minimo (massimo). Limitazioni superiori ed inferiori di un sottoinsieme di un insieme ordinato. Sottoinsiemi limitati e illimitati superiormente e inferiormente. Alcune proprietà dei campi ordinati. Irrazionalità della radice quadrata di 2. Estremo superiore ed estremo inferiore di un sottoinsieme limitato in un insieme ordinato. Teorema di unicità dell'estremo superiore. Relazione tra  $\sup A$  e  $\max A$ . Esempio di un insieme limitato di  $\mathbb{Q}$  per il quale non esiste estremo superiore. Insufficienza dei numeri razionali. Insiemi separati. Elemento separatore. Esempio di insiemi separati in  $\mathbb{Q}$  che non hanno elemento separatore. Proprietà di continuità (assioma di Dedekind). Campi ordinati completi.  $\mathbb{R}$  è un campo ordinato completo.  $\mathbb{Q}$  è un campo ordinato ma non è completo. Teorema di caratterizzazione della completezza per un campo ordinato (l'esistenza dell'estremo superiore di ogni insieme non vuoto superiormente limitato in  $\mathbb{R}$  è equivalente all'assioma di Dedekind).  $\mathbb{N}$  è superiormente illimitato in  $\mathbb{R}$  (proprietà di Archimede in  $\mathbb{R}$ ). Teorema della densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ . Densità di  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ . Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore (inferiore) in  $\mathbb{R}$ . Insiemi contigui. Unicità dell'elemento separatore tra insiemi contigui.

**I numeri naturali e il calcolo combinatorio.** Proprietà fondamentali (assiomi di Peano). Il principio di induzione. Successioni. Esempi di definizioni per ricorrenza. La successione di Fibonacci. Esempi di verifiche utilizzando il principio di induzione. La progressione aritmetica e la progressione geometrica. Calcolo combinatorio. Permutazioni di un insieme. Il fattoriale di  $n$ . Il numero delle possibili permutazioni di un insieme di  $n$  elementi. Disposizioni e combinazioni di classe  $k$  di un insieme di  $n$  elementi. Il numero delle possibili disposizioni e combinazioni di classe  $k$  di un insieme di  $n$  elementi. Coefficienti binomiali e alcune loro proprietà. La formula di Stifel e il triangolo di Tartaglia. La formula del binomio di Newton.

**Funzioni elementari.** Funzioni. Grafico di una funzione. Le funzioni costanti. La funzione identica. La funzione valore assoluto. Funzioni caratteristiche di un insieme. Proprietà del valore assoluto. Intervalli di  $\mathbb{R}$ . Descrizione di un intervallo aperto di centro un punto mediante il valore assoluto. Le notazioni  $\sup A = +\infty$  e  $\inf A = -\infty$ . Palla aperta di centro un numero reale e raggio un numero reale positivo. Funzioni limitate e illimitate. Massimo, minimo, estremi superiore ed inferiore di una funzione. Funzioni monotone (strettamente crescenti/decrescenti, debolmente crescenti/decrescenti). Algebra delle funzioni reali. Funzione somma, funzione prodotto, funzione quoziente. Funzioni polinomiali e funzioni razionali. Funzioni composte. Funzioni pari e dispari. La funzione potenza di esponente naturale. Proprietà analitiche della funzione potenza di esponente naturale. Teorema di esistenza della radice ennesima. La funzione radice ennesima e le sue proprietà. Le potenze di esponente intero, razionale e reale e le loro proprietà analitiche e algebriche. La funzione esponenziale  $a^x$ , con  $a > 0$ , e le sue proprietà (la dimostrazione della suriettività su  $]0, +\infty[$  della funzione  $a^x$  è facoltativa). La funzione logaritmo e sue proprietà. Cenni all'uso in navigazione del sestante. Funzioni periodiche, periodo, periodo minimo. Le funzioni parte intera e mantissa. Misura di un angolo in radianti. Le funzioni circolari seno, coseno, tangente e le loro proprietà. Relazioni fondamentali tra funzioni circolari. Formule di addizione (dimostrazione facoltativa). Funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente e loro proprietà. Combinazioni lineari in seno e coseno e riduzione alla forma  $A \sin(\omega x + \varphi)$ . Studio di grafici di funzioni ottenute mediante traslazioni, dilatazioni o composizione con il valore assoluto di una funzione nota. Funzioni del tipo  $e^{-x} \sin x$ . Polinomi e funzioni polinomiali. Principio di identità dei polinomi. Divisione tra polinomi. Polinomi riducibili e polinomi irriducibili. Zeri di un polinomio. Molteplicità di uno zero. Teorema di Cartesio-Ruffini.

**Successioni di numeri reali.** Successioni di numeri reali. Successioni limitate. Proprietà verificate definitivamente. Sottosuccessioni. Definizione di limite finito di una successione di numeri reali. Successioni convergenti. Successioni infinitesime. Teorema di unicità del limite. Una successione convergente è limitata.

Limite delle sottosuccessioni ed un criterio per la non esistenza del limite di una successione. Successioni divergenti. Limite  $+\infty$  o  $-\infty$  di una successione di numeri reali. Intorni di un numero reale, di  $-\infty$  e di  $+\infty$ . Definizione di limite di una successione usando la nozione di intorno. Successioni monotone. Teorema di esistenza del limite di una successione monotona. La successione  $(1 + \frac{1}{n})^n$  è limitata. La successione  $(1 + \frac{1}{n})^n$  è crescente (dimostrazione facoltativa). Il numero  $e$  di Nepero. Il limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ . Rappresentazione in base  $B$  di un numero reale. Il Teorema di Bolzano-Weierstrass (esistenza di una sottosuccessione convergente di una successione limitata; dimostrazione facoltativa). Successioni illimitate e sottosuccessioni divergenti. Successione delle medie aritmetiche dei termini di una successione convergente.

**Limiti di funzioni reali e funzioni continue.** Proprietà degli intorni. Punti di accumulazione di un insieme. Chiusura di un insieme. Insiemi chiusi. Insiemi compatti. Limite per  $x$  che tende a  $-\infty$  o a  $+\infty$  di una funzione  $f(x)$  (definizione con gli intorni). Definizioni esplicite nei casi del limite finito, limite  $-\infty$ , limite  $+\infty$ . Limite per  $x$  che tende a  $x_0 \in \mathbb{R}$  di una funzione  $f(x)$  (definizione con gli intorni). Definizioni esplicite nei casi del limite finito, limite  $-\infty$ , limite  $+\infty$ . Caratterizzazione dei punti di accumulazione con le successioni. Unioni finite di compatti sono compatte. Caratterizzazione dei compatti con le successioni. Un insieme compatto ha sempre massimo e minimo. Caratterizzazione del limite di una funzione mediante le successioni. Teorema di unicità del limite. Teorema sul limite della restrizione. Un criterio per stabilire la non esistenza del limite. Limiti destri e sinistri. Il limite esiste se e solo se esistono e sono uguali limite destro e sinistro. Funzioni discoste da zero. Proprietà verificate localmente in un punto. Teorema della limitatezza locale. Teorema della permanenza del segno per i limiti. Limiti delle funzioni monotone. Teoremi sul limite della somma. Teoremi sul limite del prodotto. Teoremi sul limite della funzione reciproca e della funzione quoziente. Funzioni continue. Continuità delle funzioni razionali. Continuità delle funzioni esponenziali. Continuità delle funzioni circolari (seno, coseno, tangente). Continuità della funzione composta di funzioni continue. Teorema sul limite delle funzioni composte. Limiti a  $\pm\infty$  delle funzioni razionali. Teoremi di confronto dei limiti. Teorema dei “due carabinieri”. Continuità del valore assoluto. Continuità della funzione inversa di una funzione monotona definita su un intervallo. Continuità di una funzione strettamente monotona con immagine un intervallo. Continuità delle funzioni potenza, delle funzioni esponenziali, delle funzioni logaritmo, delle funzioni circolari inverse, delle radici. Funzioni continue a destra e a sinistra. I “limiti notevoli”  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^\alpha - 1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log_a x$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha a^x$ . Diverse tecniche per il calcolo dei limiti. I teoremi fondamentali sulle funzioni continue. Teorema di esistenza degli zeri (di Bolzano) e il metodo di bisezione. Caratterizzazione degli intervalli. Teorema di connessione. Alcune applicazioni nella risoluzione di un'equazione. Teorema di Weierstrass. Funzioni assolutamente continue. Teorema di Heine (senza dimostrazione).

**Calcolo differenziale.** Il problema delle tangenti. Secante di una curva. L'inflazione, la velocità, l'intensità di corrente, la pendenza. Rapporto incrementale di una funzione relativamente a due punti. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della secante il grafico. Derivata di una funzione in un punto. Interpretazione geometrica come coefficiente angolare della tangente il grafico. Equazione della retta tangente. Funzione derivabile in un punto. La funzione derivata. Derivata delle funzioni  $f(x) = mx + q$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = a^x$  con  $a > 0$  e  $a \neq 1$ ,  $f(x) = \log_a(x)$ , con  $a > 0$  e  $a \neq 1$ ,  $f(x) = |x|$ . Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto. Derivata delle funzioni  $\sqrt{x}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ . Teorema di continuità delle funzioni derivabili. L'esistenza della derivata nel punto non è sufficiente per garantire la continuità. Regole di derivazione. Teorema sulla derivata della combinazione lineare. Gli spazi vettoriali  $\mathcal{C}^0(E)$  e  $\mathcal{C}^1(E)$ . L'operatore lineare  $D : \mathcal{C}^1(E) \rightarrow \mathcal{C}^0(E)$ . Derivata del prodotto. Derivata delle funzioni  $f(x) = x^n$  con  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = x^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Derivata della funzione reciproca e del quoziente. Derivata della funzione  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa. Osservazioni sulla formula della derivata della funzione inversa. Derivate delle funzioni radice  $n$ -esima, dei logaritmi, delle funzioni circolari inverse. L'equazione del pendolo. Modello lineare di un problema. Approssimante lineare di una funzione in un punto. Funzioni differenziabili. Teorema di esistenza dell'approssimante lineare. Differenziale di una funzione in un punto. Notazione di Leibniz per la derivata. Potenziale del dipolo elettrico (non chiesto all'esame). Derivate successive. Spazi  $\mathcal{C}^n(E)$  e operatore  $D^n$ . Punti di estremo (massimo, minimo) relativo. Punti critici per una funzione. Teorema di Fermat (zeri della derivata e punti di estremo relativo).

Considerazioni sulla ricerca dei punti di estremo. Proprietà delle funzioni derivabili su un intervallo: i teoremi di Rolle e di Cauchy. Rappresentazione parametrica di una curva piana. Un'interpretazione geometrica del teorema di Cauchy. Teorema di Lagrange e formula del valor medio. Media aritmetica e media geometrica. Funzioni a derivata nulla su un intervallo. Funzioni monotone su un intervallo e segno della derivata. Una condizione sufficiente per un punto di estremo relativo utilizzando il segno della derivata in un intorno. Studio di una funzione. Le funzioni iperboliche  $\sinh x$  e  $\cosh x$ ; loro proprietà e formule principali. Funzioni asintotiche. Asintoti orizzontali e obliqui a  $-\infty$  e a  $+\infty$ . Un teorema sulla ricerca degli asintoti. Asintoti verticali in un punto. Il teorema di de L'Hôpital (dimostrazione solo nel caso  $0/0$ ). Applicazioni del teorema di de L'Hôpital al calcolo dei limiti. Funzioni primitive. Funzioni primitivabili. Il teorema sul limite della derivata. Una funzione primitivabile non può avere discontinuità di tipo "salto". Funzioni infinite e funzioni infinitesime in un punto. Ordine di infinito (infinitesimo); confronto tra ordini di infinito (infinitesimo). Ordini di infinito (infinitesimo) reali, soprareali, sottoreali, infra reali.  $o$  piccolo di Landau. Il lemma di Peano. Un'applicazione al calcolo dell'ordine di infinitesimo di una funzione in un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Polinomio approssimante  $n$ -esimo di una funzione in un punto. Teorema di Taylor. Resto nella forma di Peano. Resto nella forma di Lagrange (dimostrazione facoltativa). L'uso del polinomio di Taylor per approssimare il valore di una funzione con valutazione dell'errore. Il polinomio di Taylor-Mac Laurin di ordine  $n$  delle principali funzioni elementari:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $\log(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ ,  $\arctg x$ ,  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ . Insiemi convessi di  $\mathbb{R}^n$ . Sopragrafico di una funzione. Funzione convessa su un intervallo. La funzione  $\varphi_{x_1 x_2}$  che descrive la corda del grafico di una funzione. Caratterizzazione delle funzioni derivabili convesse (strettamente convesse) come funzioni la cui derivata è crescente (strettamente crescente). Relazione tra convessità e segno della derivata seconda per una funzione due volte derivabile su un intervallo. Convessità e retta tangente. Punto di flesso ascendente e discendente. Comportamento della derivata di una funzione che ammette limite finito per  $x$  tendente a  $+\infty$ . La derivata seconda si annulla in un punto di flesso. Test della derivata seconda per i punti di massimo e minimo relativo.

**Calcolo integrale.** Il problema della definizione dell'area di una figura piana. Alcune motivazioni per l'introduzione dell'integrale: volume, massa, baricentro. Decomposizione di un intervallo compatto. Relazione di finezza tra decomposizioni. Somme integrali inferiori e superiori di una funzione limitata su un intervallo compatto. Proprietà di confronto tra le somme integrali. Funzione integrabile secondo Riemann su un intervallo compatto. Integrale di una funzione integrabile su un intervallo compatto. Esempio di funzione non integrabile. Esempio di calcolo dell'integrale dalla definizione. Teorema di integrabilità delle funzioni monotone. Teorema di integrabilità delle funzioni continue. Trascurabilità degli insiemi finiti nell'integrale di Riemann (dimostrazione facoltativa). Alcune proprietà dell'integrale di Riemann: linearità dell'operatore integrale (senza dimostrazione), integrabilità del prodotto (senza dimostrazione), monotonia dell'operatore integrale (dimostrazione facoltativa), integrabilità del valore assoluto (con dimostrazione). Teorema di additività del dominio nell'integrale (senza dimostrazione). Teorema della media integrale. Funzioni localmente integrabili su un intervallo. Integrale orientato di una funzione localmente integrabile su un intervallo. Formula di Chasles. Funzione integrale di una funzione  $f$  con punto iniziale  $x_0$ . Teorema di continuità della funzione integrale. Il teorema fondamentale del calcolo. Le funzioni continue sono primitivabili. Esempio di una funzione primitivabile non integrabile e di una funzione integrabile non primitivabile. Caratterizzazione delle funzioni primitive su un intervallo. Tabella delle primitive immediate. La formula di Torricelli Barrow. Determinazione di una primitiva per scomposizione in somma, per parti, per sostituzione. Integrazione definita per parti e per sostituzione. Fattorizzazione di un polinomio in  $\mathbb{R}$ . Primitive delle funzioni razionali: metodo di decomposizione di Hermite. Primitive di alcune funzioni riconducibili ad integrali di funzioni razionali mediante sostituzioni opportune. Derivata di una funzione del tipo  $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t) dt$ . Studio di una funzione definita mediante integrali. Funzioni integrabili in senso generalizzato e integrale generalizzato di una funzione su un intervallo non compatto. Aut aut per la convergenza dell'integrale delle funzioni non negative. Criterio del confronto per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative. Criterio dell'ordine di infinitesimo per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative su intervalli chiusi illimitati. Criterio dell'ordine di infinito per gli integrali in senso generalizzato di funzioni non negative non limitate su intervalli del tipo  $[a, b[$  o  $]a, b[$ . Funzioni assolutamente integrabili. L'assoluta integrabilità in senso generalizzato di una funzione localmente integrabile implica l'integrabilità in senso generalizzato.

### Testi consigliati

P. Omari, M. Trombetta, *Appunti del corso di analisi matematica (per il diploma universitario)*, Uni-

versità degli Studi di Trieste, Facoltà di Ingegneria. (Da richiedersi al docente su supporto informatico).

Altri testi: M. Conti, D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, *Analisi matematica (dal calcolo all'analisi) Volume 1*, Apogeo; M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, *Matematica. Calcolo infinitesimale e algebra lineare*, Zanichelli; E. Giusti, *Analisi matematica 1*, Bollati Boringhieri (testo classico); J. Stewart, *Calcolo 1 e 2*, Apogeo; R. A. Adams, *Calcolo differenziale 1 e 2*, Casa Editrice Ambrosiana; (impostazione americana).

Alla pagina <http://www.dsm.univ.trieste.it/~obersnel> potete trovare ulteriori informazioni sul corso, tutti gli esercizi assegnati a lezione, esercizi svolti, compiti assegnati agli esami.