

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Applicazioni delle trasformate di Laplace.

Prof. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si risolvano, con la trasformata di Laplace, i seguenti problemi:

$$a) \begin{cases} x'' + 4x' + 13x = te^{-t}; \\ x(0) = 0; x'(0) = 2. \end{cases} \quad b) \begin{cases} x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0; \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0; x'''(0) = 1. \end{cases} \quad c) \begin{cases} x' = -4x - y + e^{-t}; \\ y' = x - 2y; \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Sia f è una funzione continua assegnata. Si risolva, con la trasformata di Laplace, il seguente problema:

$$\begin{cases} x''' + 2x'' + x' = f(t); \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3 Si risolvano i circuiti elettrici di equazione

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q(t) = e(t); \\ i(0) = 0, \end{cases}$$

quando $q(0) = 0$ e

$$a) L = 1, R = 0, C = 10^{-4}, e(t) = 100 \chi_{[0, 2\pi]}(t). \quad b) L = 1, R = 100, C = 4 \cdot 10^{-4}, e(t) = 50 t \chi_{[0, 1]}(t).$$

(Qui χ_E indica la funzione caratteristica dell'insieme E)

Esercizio 4 Una massa di peso unitario è attaccata ad una molla leggera che viene tesa di 1 metro da una forza di 4 kg. La massa è inizialmente a riposo nella sua posizione di equilibrio. All'istante $t = 0$ una forza esterna $f(t) = \cos(2t)$ viene applicata alla massa, ma al tempo $t = 2\pi$ la forza viene spenta istantaneamente. Si trovi la funzione posizione $x(t)$ della massa.

Esercizio 5 Si utilizzi la trasformata di Laplace per determinare una funzione $\varphi : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0 & \text{per ogni } x > 0 \text{ e } y > 0, \\ \varphi(0, y) = 1 & \text{per ogni } y > 0, \\ \varphi(x, 0) = e^{-x} & \text{per ogni } x > 0. \end{cases}$$

- Soluzioni:** 1. a) $x(t) = \frac{1}{50}((5t - 1)e^{-t} + e^{-2t}(\cos(3t) + 32 \sin(3t))) u(t)$.
 b) $x(t) = \frac{1}{16}(\sin(2t) - 2t \cos(2t))u(t)$.
 c) $x(t) = (-\frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{2}te^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-t}) u(t)$; $y(t) = (-\frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{2}te^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-t}) u(t)$.
 2. $x(t) = \int_0^t (1 - (1 + t - \xi)e^{-(t-\xi)}) f(\xi) d\xi$.
 3. a) $i(t) = (1 - u(t - 2\pi))(\sin(100t))u(t)$.
 b) $i(t) = \frac{1}{50}((1 - e^{-50t} - 50te^{-50t})u(t) + (-1 + e^{-50(t-1)} - 2450(t-1)e^{-50(t-1)})u(t-1))$.
 4. Il problema si traduce nell'equazione $x'' + 4x = f(t)$; $x(0) = x'(0) = 0$. $x(t) = \frac{1}{4}t(\sin(2t))u(t)$ se $t < 2\pi$ e $x(t) = \frac{\pi}{2}\sin(2t)$ se $t \geq 2\pi$.
 5. $\varphi(x, y) = (e^{y-x} - 1)u(x - y) + u(x)$.