Capitolo 1

La trasformata di Laplace.

1.1 Il dominio del tempo e il dominio della frequenza.

Una tecnica ben nota per risolvere un'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine n del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

consiste nel considerare l'equazione caratteristica associata

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

e trovare tutti i suoi zeri complessi. Ad ogni radice dell'equazione si fa poi corrispondere una soluzione dell'equazione differenziale di partenza e questo permette di ottenere una base per lo spazio delle soluzioni. Dunque un problema differenziale viene tradotto in un problema squisitamente algebrico e la soluzione ottenuta per via algebrica viene successivamente riconvertita nella soluzione del problema originario.
Il passaggio dal problema differenziale a quello algebrico è una trasformazione, cioè un operatore che trasforma equazioni differenziali in equazioni algebriche, incognite funzionali in incognite numeriche, operazioni di derivazione e integrazione in operazioni algebriche.
Prendendo a prestito la terminologia usata nello studio delle reti elettriche diremo di trovarci nel dominio del tempo (dominio t) quando abbiamo a che fare con il problema originale; le nostre funzioni avranno in genere variabile

indipendente t e si indicheranno con lettere minuscole del tipo $f(t)$. Diremo invece di trovarci nel dominio della frequenza (dominio s) quando abbiamo a che fare con il problema trasformato; le nostre funzioni avranno in genere variabile indipendente s e si indicheranno con lettere maiuscole del tipo $F(s)$. L'operatore di trasformazione permette di passare dal dominio t al dominio s.
Una volta in possesso della soluzione del problema trasformato sarà poi necessario ritornare alla soluzione originaria mediante l'operazione inversa a quella di trasformazione: l'antitrasformazione. Questa sarà un nuovo operatore che permette di passare dal dominio della frequenza al dominio del tempo.

1.2 Funzioni trasformabili e il dominio della trasformata.

Gli integrali considerati si intendono secondo Riemann.
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$. Sia $s \in \mathbb{C}$. Diremo *integrale di Laplace* l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{\tau \to +\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt. \tag{1.1}$$

Sia $A \subset \mathbb{C}$ l'insieme dei numeri s per i quali l'integrale $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ converge. Si può allora definire una funzione $F\colon A \to \mathbb{C}$ ponendo $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$; tale funzione F si dice la *trasformata di Laplace* della funzione f.
La relazione $f \mapsto F$ definisce un operatore $\mathcal{L}$ definito sull'insieme delle funzioni che ammettono trasformata e a valori in un insieme di funzioni definite su sottoinsiemi di $\mathbb{C}$. Si usa scrivere $\mathcal{L}\{f\} = F$.
È semplice verificare che $\mathcal{L}$ è lineare, cioè che $\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\}$.

Esempio 1.2.1 *Consideriamo la funzione*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & se \quad t < 0 \\ e^{t^2} & se \quad t \geq 0 \end{cases} .$$

L'integrale di Laplace di f diverge per ogni s, dunque non esiste la trasformata di tale funzione.

Esempio 1.2.2 *Consideriamo ora la funzione*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & se \quad t < 0 \\ \\ e^{\alpha t} & se \quad t \geq 0 \end{cases} .$$

Si ha $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{s-\alpha}$ se $\Re(s) > \alpha$ mentre non è definita se $\Re(s) \leq \alpha$.

Esempio 1.2.3 *Consideriamo infine la funzione*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & se \quad t < 0 \\ \\ e^{-t^2} & se \quad t \geq 0 \end{cases} .$$

Si ha $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-t^2} dt$, convergente per ogni s.

Dagli esempi visti si osserva che non tutte le funzioni ammettono la trasformata di Laplace e che in generale la trasformata, se esiste, può non essere definita su tutto $\mathbb{C}$. Diremo che una funzione f è *traformabile* se ammette la trasformata in almeno un punto $s \in \mathbb{C}$.
Esempi importanti di funzioni trasformabili sono le funzioni di ordine esponenziale, cioè funzioni f tali che esiste una costante $\beta \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $|f(t)|e^{-\beta t}$ sia limitata in $\mathbb{R}$. Infatti, sia f di ordine esponenziale e sia $|f(t)|e^{-\beta t} \leq M$; si ha

$$\int_0^\infty \left| e^{-st} f(t) \right| dt = \int_0^\infty e^{-(\Re(s)-\beta)t} \cdot e^{-\beta t} |f(t)| dt \leq M \int_0^\infty e^{-(\Re(s)-\beta)t} dt$$

e l'ultimo integrale converge per $\Re(s) > \beta$. Dunque la funzione $e^{-st} f(t)$ non solo è integrabile su $[0, +\infty)$ ma è ivi addirittura assolutamente integrabile.
Si noti però che esistono anche funzioni trasformabili che non sono di ordine esponenziale. Un esempio è la funzione $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Questa funzione non è di ordine esponenziale perché è illimitata in 0, la funzione è però trasformabile perchè l'ordine di infinito nell'origine è $\frac{1}{2}$ (si veda l'esempio 1.5.4).
Avvertiamo il lettore che alcuni autori considerano di ordine esponenziale le funzioni che verificano una disuguaglianza del tipo $|f(t)|e^{-\beta t} \leq M$ non necessariamente per tutti i $t \in \mathbb{R}^+$, ma soltanto per ogni $t > t_0$ dove t_0 è un numero reale fissato. Secondo questa definizione la funzione $\frac{1}{\sqrt{t}}$ risulta essere di ordine esponenziale, ma risulta esserlo anche la funzione $\frac{1}{t}$ che non è trasformabile.
Il teorema seguente mostra che se una funzione è trasformabile, il dominio della trasformata è un semipiano di $\mathbb{C}$.

Teorema 1.2.4 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = 0$ *per ogni* $t < 0$*; supponiamo definita* $F(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t)dt$ *per qualche* $s_0 \in \mathbb{C}$*. Allora, per ogni* $s \in \mathbb{C}$ *con* $\Re(s) > \Re(s_0)$ *la funzione* $F(s)$ *è definita.*

Dimostrazione. Poniamo $s = s_0 + q$ con $\Re(q) > 0$.
Sia $\phi(t) := \int_0^t e^{-s_0 u} f(u)du$. Si ha allora

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = F(s_0). \tag{1.2}$$

Integrando per parti si ottiene la catena di uguaglianze:

$$\int_0^T e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-qt}[e^{-s_0 t} f(t)]dt = \left[e^{-qt} \int_0^t e^{-s_0 u} f(u)du \right]_0^T +$$

$$- \int_0^T (-q)e^{-qt}\phi(t)dt = e^{-qT}\phi(T) + q \int_0^T e^{-qt}\phi(t)dt$$

e prendendo il limite per $T \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{T \to +\infty} e^{-qT}\phi(T) + \lim_{T \to +\infty} q \int_0^T e^{-qt}\phi(t)dt.$$

Il primo addendo del secondo membro è 0 per la 1.2, il secondo addendo converge perché la $\phi(t)$ è limitata e quindi $|e^{-qt}\phi(t)| \leq Me^{-\Re(q)t}$ dove M è una limitazione per $\phi(t)$. Si ottiene in definitiva $F(s) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt}\phi(t)dt$.
□

Poniamo $A = \{s \in \mathbb{C} : F(s)$ è definita $\}$.
Sia $\lambda_0 = \inf\{\Re(s) : s \in A\}$. Per ogni $s \in \mathbb{C}$ si ha che, se $\Re(s) < \lambda_0$ allora $s \notin A$; se $\Re(s) > \lambda_0$ allora $s \in A$. Nulla si può dire in generale per gli $s \in \mathbb{C}$ tali che $\Re(s) = \lambda_0$.
Diremo *ascissa di convergenza* il numero reale λ_0.
Diremo *semipiano di convergenza* l'insieme $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \lambda_0\}$.
Diremo infine *retta di convergenza* la retta $\Re(s) = \lambda_0$.
Nell'esempio 1.2.1 è $\lambda_0 = +\infty$, il semipiano di convergenza è l'insieme vuoto e la retta di convergenza non è definita.
Nell'esempio 1.2.2 è $\lambda_0 = \alpha$, il semipiano di convergenza è il semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha\}$ e la retta di convergenza è la retta di equazione $\Re(s) = \alpha$.
Nell'esempio 1.2.3 è $\lambda_0 = -\infty$, il semipiano di convergenza è tutto il piano $\mathbb{C}$ e la retta di convergenza non è definita.

1.3 Una nota sulla convergenza assoluta.

Alcuni autori richiedono che nell'integrale 1.1 vi sia non solo la convergenza ma anche la convergenza assoluta. Nella definizione data l'integrale considerato è l'integrale di Riemann, perciò possono esistere funzioni $g(t)$ integrabili su $[0, +\infty)$ non assolutamente integrabili. Un esempio è la funzione $g(t) = \frac{1}{t}\sin t$. Se nella definizione di trasformata si utilizza l'integrale di Lebesgue la questione invece non si pone, poiché in questo caso una funzione $g(t)$ risulta integrabile su $[0, +\infty)$ se e solo se è assolutamente integrabile.
Per questo motivo alcuni autori accettano come trasformabili soltanto funzioni f tali che $|f|$ sia traformabile. Nella definizione data in questo testo invece distinguiamo tra convergenza e assoluta convergenza. In particolare si può definire l'ascissa di convergenza assoluta λ_0^{ass} come $\lambda_0^{\text{ass}} = \inf\{\Re(s) : F(s)$ è definita e assolutamente convergente $\}$.
Si ha sempre $\lambda_0 \leq \lambda_0^{\text{ass}}$, può però accadere $\lambda_0 < \lambda_0^{\text{ass}}$.

Esempio 1.3.1 *Si consideri la funzione* $f(t) = e^{kt}\sin e^{kt}$ *con* $k > 0$. *Si ha in questo caso* $\lambda_0^{ass} = k$ *mentre* $\lambda_0 = 0$.

Studiamo la convergenza assoluta di

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{kt}\sin e^{kt}dt;$$

poiché

$$|e^{(k-s)t}\sin e^{kt}| \leq e^{(k-s)t}$$

c'è convergenza assoluta per $\Re(s) > k$. D'altra parte se $s = k$ si ottiene

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st}e^{kt}\sin e^{kt}|dt = \int_0^{+\infty} |\sin e^{kt}|dt$$

e non c'è convergenza. Questo mostra che $\lambda_0^{\text{ass}} = k$.
Studiamo ora la convergenza semplice.
L'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{kt}\sin e^{kt}dt$$

diventa, mediante la sostituzione $u = e^{kt}$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{u^{-\frac{s}{k}}}{k}\sin u\, du = \frac{1}{k}\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{\frac{s}{k}}}du$$

e l'ultimo integrale converge se $\Re(\frac{s}{k}) > 0$ ossia per $\Re(s) > 0$. Dunque $\lambda_0 = 0$.

Può addirittura capitare $\lambda_0 = 0$ mentre $\lambda_0^{\mathrm{ass}} = +\infty$.

Esempio 1.3.2 *Si consideri la funzione* $f(t) = 2te^{t^2}\cos e^{t^2}$. *Si ha* $\lambda_0 = 0$ *mentre* $\lambda_0^{ass} = +\infty$.

Tale funzione non è assolutamente trasformabile. Infatti, fissato qualsiasi $s \in \mathbb{R}$, per ogni $t > s$, si ha

$$e^{-st}2te^{t^2}|\cos e^{t^2}| \geq |\cos e^{t^2}|$$

e la funzione $|\cos e^{t^2}|$ non è integrabile su $[s, +\infty)$.
D'altra parte mediante integrazione per parti si può verificare facilmente che la traformata $\mathcal{L}\{f\}$ è definita per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 0$. Infatti

$$\int_0^\tau e^{-st}e^{t^2}2t\cos e^{t^2}\,dt = \Big[e^{-st}\sin(e^{t^2})\Big]_0^\tau + s\int_0^\tau e^{-st}\sin(e^{t^2})dt.$$

L'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(e^{t^2})\,dt$ converge per ogni s tale che $\Re(s) > 0$ perché la funzione $\sin(e^{t^2})$ è limitata e quindi la trasformata $\mathcal{L}\{f\}$ è definita per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) > 0$. Si osservi che tutte le funzioni di ordine esponenziale sono assolutamente trasformabili.

1.4 Proprietà delle trasformate.

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sia $f : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione localmente integrabile rispetto alla variabile $t \in [0, +\infty)$. Si dice che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(t, s)\,dt$ *converge uniformemente rispetto ad s* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\tau_0 > 0$ tale che per ogni $\tau > \tau_0$ e per ogni $s \in \Omega$ si ha $\left|\int_\tau^{+\infty} f(t, s)\,dt\right| < \varepsilon$.
Siano $z_0 \in \mathbb{C}$ e $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$; diremo *dominio angolare* un insieme del tipo $D(z_0, \vartheta) = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq \Re(z_0), |\arg(z - z_0)| < \vartheta\}$.
Vale il seguente teorema, di cui diamo la dimostrazione solo in un caso particolare.

Teorema 1.4.1 *Sia f una funzione trasformabile e sia λ_0 la sua ascissa di convergenza. Allora l'integrale di Laplace $\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ converge uniformemente in ogni dominio angolare $D(s_0, \vartheta)$ con $\Re(s_0) > \lambda_0$.*

Teorema 1.4.2 *(Caso particolare del precedente.) Sia f una funzione di ordine esponenziale, con $M \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $|f(t)| \leq Me^{\beta t}$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. Allora per ogni $\eta > 0$ l'integrale di Laplace $\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ converge uniformemente nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq \beta + \eta\}$.*

Dimostrazione. Sia $|f(t)| \leq Me^{\beta t}$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. Sia $\beta_0 = \beta + \eta$. Sia $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) \geq \beta_0$. Allora

$$\left| \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-\beta_0 t} |f(t)|\, dt \leq$$

$$\leq M \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-(\beta_0 - \beta)t}\, dt = \frac{M}{-\eta} \left[e^{-\eta t} \right]_{\tau_0}^{\tau} =$$

$$= \frac{M}{\eta} e^{-\eta \tau_0} - \frac{M}{\eta} e^{-\eta \tau}.$$

Prendendo il limite per $\tau \to +\infty$ si ottiene

$$\left| \int_{\tau_0}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \frac{M}{\eta} e^{-\eta \tau_0}.$$

Fissato $\epsilon > 0$ si può prendere τ_0, indipendente da s, tale che $\frac{M}{\eta} e^{-\eta \tau_0} < \epsilon$.
□

Come conseguenza del teorema 1.4.1 proviamo il seguente importante

Teorema 1.4.3 *Sia f una funzione trasformabile e sia λ_0 la sua ascissa di convergenza. Sia $\bar{A} = A \cup \Gamma$ (dove Γ è la frontiera di A) una regione compatta contenuta nel semipiano di convergenza della f. Allora la funzione trasformata $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ è analitica in tale regione.*

Dimostrazione. Una regione come quella dell'ipotesi è contenuta in un opportuno dominio angolare del tipo $D(z_0, \vartheta)$ con $\Re(z_0) > \lambda_0$. Sappiamo quindi che l'integrale di Laplace converge uniformemente nella regione.
Osserviamo che per la funzione $\Psi_T(s) := \int_0^T e^{-st} f(t) dt$ valgono le condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \Psi_T}{\partial x} = -i \frac{\partial \Psi_T}{\partial y}$$

dove $s = x + iy$. Infatti

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^T e^{(-x-iy)t} f(t) dt = -\int_0^T t e^{-st} f(t) dt$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^T e^{(-x-iy)t} f(t) dt = -i \int_0^T t e^{-st} f(t) dt.$$

Inoltre la funzione ha parti reale e immaginaria differenziabili, perciò si conclude che Ψ_T è analitica. Grazie alla convergenza uniforme in A si ottiene che pure il limite $\lim_{T\to+\infty}\Psi_T$ è una funzione analitica. □

La funzione trasformata è pertanto derivabile infinite volte. Calcoliamo ora esplicitamente le derivate. Grazie alla convergenza uniforme si può portare il segno di derivazione all'interno dell'integrale. Si può quindi scrivere

$$\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt = -\int_0^{+\infty} te^{-st}f(t)dt.$$

Cioè si ottiene $F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$.
Grazie alla convergenza uniforme dell'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}t^k f(t)dt$ in modo analogo si ottiene la formula per la derivata di ordine k della F:

$$\frac{d^k}{ds^k}F(s) = (-1)^k\mathcal{L}\{t^k f(t)\}. \tag{1.3}$$

Si è dunque visto che ogni funzione trasformata è analitica e ogni sua derivata è anch'essa una trasformata. In particolare si osservi che un'operazione differenziale nel dominio della frequenza corrisponde ad un'operazione algebrica nel dominio del tempo. Questa è una situazione tipica nelle trasformate.
Osserviamo di seguito un'ulteriore proprietà delle trasformate.

Teorema 1.4.4 *Sia F la trasformata di una funzione f. Allora*

$$\lim_{\Re(s)\to+\infty} F(s) = 0.$$

Dimostrazione. Fissiamo arbitrariamente un numero $\epsilon > 0$. La funzione $|e^{-st}f(t)|$ è integrabile su ogni intervallo limitato anche se potrebbe essere non integrabile su $[0, +\infty)$. Si noti che anche la funzione $|f(t)|$ è integrabile su ogni intervallo limitato. In particolare è possibile trovare un numero T_1 sufficientemente piccolo affinché

$$\int_0^{T_1} |f(t)|dt < \epsilon. \tag{1.4}$$

Per la definizione di integrale generalizzato si ha inoltre

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)dt = F(s) \in \mathbb{R}$$

se $\Re(s) > \lambda_0$. Grazie al teorema 2.4.1 sappiamo inoltre che la convergenza è uniforme rispetto a s. Quindi è possibile trovare un numero T_2 (indipendente da s) abbastanza grande affinché

$$|\int_{T_2}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt| < \epsilon. \tag{1.5}$$

Fissati T_1 e T_2 possiamo trovare un numero α sufficientemente grande affinché

$$e^{-\alpha T_1} \int_{T_1}^{T_2} |f(t)|dt < \epsilon. \tag{1.6}$$

Possiamo scrivere

$$|F(s)| = |\int_0^{T_1} e^{-st} f(t)dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t)dt + \int_{T_2}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt| \leq$$

$$\leq |\int_0^{T_1} e^{-st} f(t)dt| + |\int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t)dt| + |\int_{T_2}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt|.$$

Il terzo addendo è maggiorato da ϵ per la 1.5. Lo stesso accade per il primo e il secondo addendo grazie alle 1.4 e 1.6 essendo

$$|\int_0^{T_1} e^{-st} f(t)dt| \leq \int_0^{T_1} |f(t)|dt < \epsilon$$

e

$$|\int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t)dt| \leq e^{-\alpha T_1} \int_{T_1}^{T_2} |f(t)|dt < \epsilon$$

per s sufficientemente grande.
Si conclude che $|F(s)| < 3\epsilon$ definitivamente e il teorema è dimostrato.
Diamo una dimostrazione alternativa applicabile nel caso in cui la funzione f sia assolutamente trasformabile. Sia $\lambda > \lambda_0$. La funzione $g(t) := e^{-\lambda t}|f(t)|$ è integrabile e per $\Re(s) > \lambda$ si ha $|e^{-\Re(s)t} f(t)| \leq g(t)$. La funzione $e^{-\Re(s)t} f(t)$ è dominata da g uniformemente rispetto ad s e quindi, per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si può portare il limite all'interno del segno integrale. Si ottiene pertanto

$$\lim_{\Re(s)\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \lim_{\Re(s)\to+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = 0.$$

□

Si noti in particolare che un polinomio non nullo non è mai una trasformata.

1.5 Smorzamento, ritardo, cambiamento di scala.

In quanto segue supponiamo che f sia una funzione trasformabile con trasformata F e con ascissa di convergenza λ_0^f.

Sia $\gamma \in \mathbb{C}$. Si consideri la funzione "smorzata" $g_1(t) := e^{\gamma t} f(t)$. Si ha allora

$$\mathcal{L}\{e^{\gamma t} f(t)\}(s) = F(s-\gamma) \tag{1.7}$$

e l'ascissa di convergenza $\lambda_0^{g_1}$ della funzione g_1 è $\lambda_0^{g_1} = \lambda_0^f + \Re(\gamma)$.
Infatti si ha $\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\gamma t} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\gamma)t} f(t)dt = F(s-\gamma)$.
Inoltre la F è definita in $s-\gamma$ se $\Re(s-\gamma) > \lambda_0^f$ e non è ivi definita se $\Re(s-\gamma) < \lambda_0^f$. Pertanto $\lambda_0^{g_1} = \lambda_0^f + \Re(\gamma)$.

Sia ora $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Consideriamo la funzione traslata $g_2(t) := f(t-a)$. Si ricorda che noi supponiamo sempre che la f sia nulla per $t < 0$, dunque $g_2(t) = 0$ se $t < a$. Si ha allora

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s) \tag{1.8}$$

e l'ascissa di convergenza della g_2 è uguale all'ascissa di convergenza della f.
Infatti si ha $\int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)} f(u)du = e^{-as} F(s)$.

Sia infine $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$. Consideriamo la funzione ottenuta dal cambiamento di scala $g_3(t) := f(\omega t)$. Si ha allora

$$\mathcal{L}\{f(\omega t)\}(s) = \frac{1}{\omega} F(\frac{s}{\omega}) \tag{1.9}$$

e l'ascissa di convergenza $\lambda_0^{g_3}$ della funzione g è $\lambda_0^{g_3} = \omega \lambda_0^f$.
Infatti mediante la sostituzione $u = \omega t$ si ottiene $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(\omega t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{\omega}u} \frac{1}{\omega} f(u)du = \frac{1}{\omega} F(\frac{s}{\omega})$.
L'ascissa di convergenza si determina osservando che $\frac{s}{\omega} > \lambda_0^f$ se e solo se $s > \omega \lambda_0^f$.

Esempio 1.5.1 *Sia $u(t)$ la funzione di Heaviside:*

$$u(t) := \begin{cases} 0 & se\ t < 0 \\ 1 & se\ t \geq 0 \end{cases} .$$

Si ha $\mathcal{L}\{u\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$ per $s > 0$ e $\lambda_0 = 0$.

Esempio 1.5.2 *Sia* $f(t) = t^k u(t)$, $k \in \mathbb{N}$.

Usando la 1.3 e tenendo presente l'esempio 1.5.1 si ottiene

$$\mathcal{L}\{t^k u(t)\}(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

Esempio 1.5.3 *Sia* $f(t) = e^{\gamma t} u(t)$.

Usando la 1.7 e tenendo presente l'esempio 1.5.1 si ottiene

$$\mathcal{L}\{e^{\gamma t} u(t)\}(s) = \frac{1}{s-\gamma}.$$

$\lambda = \Re(\gamma)$.
In particolare, prendendo $\gamma = i\omega$ e $\gamma = -i\omega$, e potendo scrivere $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ si ottiene

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t) u(t)\}(s) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}) = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

In modo analogo si ottiene

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t) u(t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Esempio 1.5.4 *Sia* $\alpha \in \mathbb{C}$ *con* $\Re(\alpha) > -1$. *Sia* $f(t) = t^\alpha u(t)$.

La trasformata di f è $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^\alpha dt$. Ricordando la definizione della funzione $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du$ e supponendo $s \in \mathbb{R}$ si può sostituire $u = st$ e si ottiene

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \frac{1}{s} du = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

Ora F e $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ sono due funzioni analitiche che coincidono sull'asse reale positivo, perciò devono coincidere su tutto il semipiano $\Re(s) > 0$. Si ottiene pertanto

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

per ogni s tale che $\Re(s) > 0$ e per ogni α tale che $\Re(\alpha) > -1$. In particolare per $\alpha \in \mathbb{N}$ si riottiene la formula dell'esempio 1.5.2.

Esempio 1.5.5 *Trasformata di una funzione periodica.*

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione nulla per $t < 0$ e periodica di periodo $T > 0$ sul semiasse positivo. Poniamo

$$f^*(t) := \begin{cases} f(t) & \text{se } t \leq T \\ 0 & \text{se } t > T \end{cases} .$$

Supponiamo nota la trasformata $F^* := \mathcal{L}\{f^*\}$, vogliamo determinare la trasformata di f.
Si ha $f^*(t) = f(t) - f(t)u(t-T) = f(t) - f(t-T)$ e quindi, grazie alla formula del ritardo 1.8 si ottiene $F^*(s) = F(s) - e^{-Ts}F(s) = (1-e^{-Ts})F(s)$ e pertanto

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} F^*.$$

Esempio 1.5.6 *Trasformata di una serie.*

Sia assegnata una serie convergente di funzioni $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(t)$. Si può concludere che la serie di f è la serie delle trasformate, cioè $F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n F_n(s)$? In generale la risposta è negativa. Infatti la trasformata del limite di una successione di funzioni può non essere il limite della successione delle trasformate. Ad esempio possiamo considerare la successione

$$g_k(t) = k\left(u(t) - u(t - \frac{1}{k})\right).$$

Si ha chiaramente $\lim_{k\to+\infty} g_k(t) = 0$ per ogni $t > 0$ mentre $G_k(s) = \mathcal{L}\{g_k(t)\}(s) = \frac{k}{s}\left(1 - e^{-\frac{s}{k}}\right)$, e quindi $\lim_{k\to+\infty} G_k(s) = 1$.
Un secondo esempio è dato dalla serie

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

La serie delle trasformate è

$$\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{s^{2n}},$$

che non converge.

In alcuni casi particolari, però, la trasformata di una serie è la serie delle trasformate. Ad esempio si può dimostrare che se

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

è una serie convergente per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed esistono due costanti reali positive K e α e un naturale n_0 tali che per ogni $n \geq n_0$ $|a_n| \leq K\frac{\alpha^n}{n!}$, allora per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > \alpha$ si ha

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}}.$$

1.6 Trasformazione della derivata.

Lemma 1.6.1 *Sia f una funzione trasformabile con ascissa di convergenza λ_0. Sia $\mu_0 := \max\{\lambda_0, 0\}$. Allora si ha*

$$\lim_{T \to +\infty} e^{-sT} \int_0^T f(t)dt = 0$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > \mu_0$.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $\lambda_0 < 0$. Allora $\mu_0 = 0$ e l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ converge per $s = 0$, cioè $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ è convergente e quindi è evidente che $\lim_{T\to+\infty} e^{-sT} \int_0^T f(t)dt = 0$.
Supponiamo ora $\lambda_0 \geq 0$. Allora $\mu_0 = \lambda_0$. Sia $s \in \mathbb{C}$ tale che $\Re(s) > \mu_0$. Esiste un numero reale positivo α_0 tale che $\mu_0 < \alpha_0 < \Re(s)$. La funzione F è definita in α_0.
Poniamo

$$\phi(t) = \int_0^t e^{-\alpha_0 u} f(u)du.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^T e^{\alpha_0 t} e^{-\alpha_0 t} f(t)dt =$$

$$\left[e^{\alpha_0 t}\phi(t)\right]_0^T - \alpha_0 \int_0^T e^{\alpha_0 t}\phi(t)dt = e^{\alpha_0 T}\phi(T) - \alpha_0 \int_0^T e^{\alpha_0 t}\phi(t)dt.$$

La funzione $\phi(t)$ è limitata perché $\lim_{t\to+\infty}\phi(t) = F(\alpha_0)$. Sia M una sua maggiorazione. Si può allora scrivere

$$|\int_0^T f(t)dt| \le e^{\alpha_0 T}M + \alpha_0 M\left[\frac{e^{\alpha_0 t}}{\alpha_0}\right]_0^T = 2Me^{\alpha_0 T} - M \le 2Me^{\alpha_0 T}$$

ed essendo $\Re(s) > \alpha_0$ si ottiene

$$|e^{-sT}\int_0^T f(t)dt| \le 2Me^{(\alpha_0 - \Re(s))T}$$

e poiché $\alpha_0 - \Re(s) < 0$ il secondo membro tende a 0 per $T \to +\infty$. □

Teorema 1.6.2 *Sia f una funzione tale che $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$. Supponiamo che $f'(t)$ esista per ogni $t > 0$ e che la funzione $f'(t)$ sia trasformabile con ascissa di convergenza λ_0 (la funzione f potrebbe non essere derivabile in $t = 0$). Allora anche la funzione f è trasformabile e si ottiene*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0^+)$$

per ogni $s > \max\{\lambda_0, 0\}$, dove $f(0^+) := \lim_{t\to 0^+} f(t)$.

Dimostrazione. Si osservi che $f(0^+)$ esiste finito. Questo è conseguenza della trasformabilità della funzione f'. Infatti, l'esistenza dell'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}f'(t)\,dt$ implica l'esistenza dell'integrale $\int_0^1 e^{-st}f'(t)\,dt$, che a sua volta implica l'esistenza dell'integrale

$$\int_0^1 f'(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 f'(t)\,dt = f(1) - f(0^+).$$

Sia λ_0 l'ascissa di convergenza della funzione $f'(t)$ e si ponga $\mu_0 := \max\{\lambda_0, 0\}$ come nel lemma precedente. Si ha, grazie al lemma, per $\Re(s) > \mu_0$

$$0 = \lim_{T\to+\infty} e^{-sT}\int_0^T f'(t)dt = \lim_{T\to+\infty} e^{-sT}\left[f(T) - f(0^+)\right],$$

da cui

$$\lim_{T\to+\infty} e^{-sT}f(T) = 0 \tag{1.10}$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)dt = \left[e^{-st}f(t)\right]_0^T + s\int_0^T e^{-st}f(t)dt =$$

$$= e^{-sT} f(T) - f(0^+) + s \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Prendendo il limite per $T \to +\infty$ si ottiene grazie anche alla 1.10

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = -f(0^+) + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

da cui la tesi $\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF - f(0^+)$. □

Esempio 1.6.3 *Si consideri la funzione* $f(t) = 1 - e^{-t}$.

Si ha $f'(t) = e^{-t}$. La funzione f' è trasformabile e la sua ascissa di convergenza è -1. Il teorema dimostrato ci assicura che anche la funzione f è trasformabile e vale $\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0^+)$. Ciò è vero se $\Re(s) > 0$. Per $-1 < \Re(s) < 0$ però la formula non vale. Infatti in tali punti la funzione $\mathcal{L}\{f\}$ non è definita in quanto l'ascissa di convergenza della funzione f è 0.

Corollario 1.6.4 *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n \mathcal{L}\{f\} - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+).$$

La formula si verifica facilmente per induzione su n.

Esempio 1.6.5 *Si calcoli la trasformata della funzione* $\sin \omega t$ *supponendo nota la trasformata* $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.

Poiché

$$\mathcal{L}\{\frac{d}{dt} \cos \omega t\}(s) = s\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) - 1 = \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} - 1 = -\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

ed essendo $\sin \omega t = -\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \cos \omega t$ si ottiene

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = -\frac{1}{\omega}(-\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Esempio 1.6.6 *Si consideri la funzione*

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \textit{se } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}.$$

Si ha

$$f'(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che $f = f'$ quasi ovunque e quindi dobbiamo avere $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{f'\}$. Per la formula della trasformata della derivata ci aspettiamo di avere $\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0^+) = sF - 1 \neq F$.
Il problema in questo esempio è che la funzione f non è derivabile su $(0, +\infty)$ perché c'è una discontinuità in $t = 1$; il teorema non vale.
Se una funzione f presenta un salto in un punto t_0 si può provare che vale la formula

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0^+) - [f(t_0^+) - f(t_0^-)]e^{-st_0}$$

dove la quantità tra parentesi quadre è il salto della funzione nel punto t_0. Questa formula si può generalizzare per derivate di ordine superiore, ad esempio

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0^+) - f'(0^+) + \\ -s[f(t_0^+) - f(t_0^-)]e^{-st_0} - [f'(t_0^+) - f'(t_0^-)]e^{-st_0}. \end{aligned}$$

Riprendendo l'esempio della nostra funzione si ha

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\frac{1 - e^{1-s}}{s-1} - 1 - [0 - e]e^{-s} = \frac{1 - e^{1-s}}{s-1} = F(s)$$

come previsto.

1.7 Prodotto di convoluzione.

Siano date due funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$. Diremo prodotto di convoluzione di f e g la funzione $f * g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, supposta esistente, così definita:

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy.$$

Si vede facilmente che il prodotto di convoluzione $*$ gode delle proprietà associativa, commutativa e distributiva rispetto alla somma.
Proviamo ad esempio la proprietà commutativa. Mediante la sostituzione $u = x - y$ si ottiene

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)f(x-u)du = g * f(x).$$

Noi siamo interessati a funzioni f e g definite su $\mathbb{R}$ e tali che $f(t) = 0$ e $g(t) = 0$ se $t < 0$. In questo caso si può scrivere

$$\int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

essendo $g(t-\tau) = 0$ se $t < \tau$.
La trasformata di Laplace si comporta molto bene riguardo all'operazione di convoluzione. Vale a proposito il seguente

Teorema 1.7.1 *Siano f e g funzioni assolutamente trasformabili. Allora è assolutamente trasformabile anche il loro prodotto di convoluzione $f * g$ e si ha*

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}.$$

Dimostrazione. Nelle uguaglianze che seguono facciamo uso dei teoremi di Fubini-Tonelli. Tale uso è giustificato grazie all'assoluta e uniforme convergenza degli integrali.

$$\mathcal{L}\{f*g\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right)dt = \iint_D e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\,dt =$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_\tau^{+\infty} e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)\,dt\right)d\tau = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-s(u+\tau)}f(\tau)g(u)\,du\right)d\tau =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau \int_0^{+\infty} e^{-su}g(u)\,du = \mathcal{L}\{f\}(s)\,\mathcal{L}\{g\}(s)$$

dove con D si è indicato il dominio di integrazione:

$$D = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 : \tau \le t\}.$$

L'assoluta traformabilità della $f * g$ si vede in modo analogo. $\square$

L'ascissa di convergenza del prodotto $f * g$ è certamente minore o uguale alla maggiore tra le ascisse di convergenza di f e g. Può capitare però che sia strettamente minore di queste.

Esempio 1.7.2 *Siano $f(t) = e^t u(t)$ e $g(t) = (1-t)u(t)$.*

Si ha $\lambda_0^f = 1$ e $\lambda_0^g = 0$. D'altra parte $f*g(t) = \int_0^t e^\tau(1-t+\tau)d\tau = t$. Dunque $\lambda_0^{f*g} = 0 < \max\{\lambda_0^f, \lambda_0^g\}$. Si noti che $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s-1}$ e $\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{s-1}{s^2}$; pertanto $\mathcal{L}\{f*g\}(s) = \frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$ è definita per $s > 0$.

Utilizzeremo la convoluzione per scoprire come si trasforma una primitiva di una funzione.

Teorema 1.7.3 *Sia f una funzione trasformabile con trasformata F. Sia $\phi(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau$. Allora*

$$\mathcal{L}\{\phi\}(s) = \frac{1}{s}F(s).$$

Dimostrazione. È sufficiente osservare che $\phi(t) = f * u(t)$ e applicare il teorema 2.7.1. □

1.8 L'antitrasformata.

Affrontiamo ora il problema del passaggio dal dominio della frequenza al dominio del tempo. Poiché non è completamente chiaro quale sia il dominio dell'operatore $\mathcal{L}$ nè quale sia la sua immagine, non sembra facile la ricerca di un'operatore inverso di $\mathcal{L}$ in senso stretto.
È inoltre evidente che l'operatore $\mathcal{L}$ non è iniettivo perché essendo un operatore integrale non può distinguere tra funzioni che differiscono soltanto su un insieme di misura nulla.
Spesso viene usato il simbolo $\mathcal{L}^{-1}$ come se fosse un operatore, senza precisare dominio e codominio. La situazione ricorda l'uso del simbolo di integrale indefinito $\int$ come operatore inverso dell'operatore di derivazione.
Una scrittura del tipo $\mathcal{L}^{-1}\{F\} = f$ si deve quindi intendere come "f è una delle funzioni trasformabili tali che $\mathcal{L}\{f\} = F$".
Un enunciato del tipo " $\mathcal{L}^{-1}\{G+H\} = \mathcal{L}^{-1}\{G\}+\mathcal{L}^{-1}\{H\}$ " è da intendere nel modo seguente: se $\mathcal{L}\{f\} = F$ e $F = G + H$, allora esistono g e h trasformabili tali che $\mathcal{L}\{g\} = G$, $\mathcal{L}\{h\} = H$ e $g + h = f$.
La dimostrazione dei teoremi seguenti si può dare utilizzando le trasformate di Fourier. Il problema della ricerca dell'antitrasformata di Fourier è di più facile risoluzione che quello della ricerca dell'antitrasformata di Laplace.

Teorema 1.8.1 *Siano f e g due funzioni trasformabili tali che $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$. Allora $f(t) = g(t)$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$.*

In particolare due funzioni continue hanno la stessa trasformata di Laplace se e soltanto se sono uguali (dunque l'operatore $\mathcal{L}$ ristretto alle funzioni continue è iniettivo).
Esiste anche una formula che ci permette di risalire alla funzione f, nota la sua trasformata F.

Teorema 1.8.2 *(Formula di Bromwich-Mellin o di Riemann-Fourier). Sia f una funzione trasformabile con trasformata F e ascissa di convergenza λ_0. Detto α un qualsiasi numero reale tale che $\alpha > \lambda_0$ vale*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \to +\infty} \int_{\alpha - i\beta}^{\alpha + i\beta} e^{st} F(s) ds$$

nei punti di continuità della f.

Nei punti di discontinuità bisogna tenere conto del salto e la formula diventa

$$\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \to +\infty} \int_{\alpha - i\beta}^{\alpha + i\beta} e^{st} F(s) ds.$$

Per utilizzare la formula di Riemann-Fourier è necessario integrare una funzione nel campo complesso lungo la retta verticale di equazione $x = \alpha$ nel piano di Gauss. Tale retta prende il nome di *retta di Bromwich.* Si noti che la formula non dipende dal valore di α purchè sia $\alpha > \lambda_0$.

Esempio 1.8.3 *Utilizziamo la formula di Riemann-Fourier per ricavare l'antitrasformata della funzione $F(s) = \frac{1}{s}$.*

Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_{\alpha - i\beta}^{\alpha + i\beta} \frac{e^{st}}{s} ds.$$

Supponiamo dapprima $t < 0$.

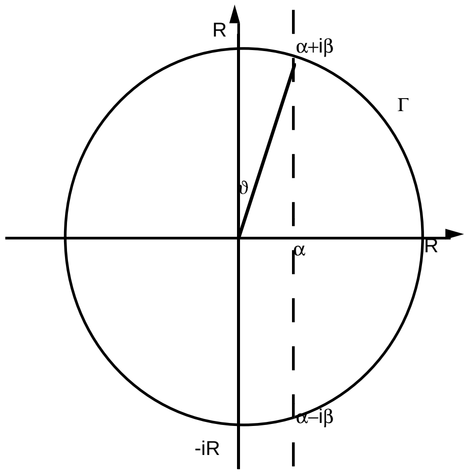
La funzione $\frac{e^{st}}{s}$ (nella variabile s) è olomorfa in una regione discosta dall'origine.

Per il teorema di Cauchy l'integrale della funzione $\frac{e^{st}}{s}$ lungo una curva chiusa che non contiene l'origine è nullo.

Consideriamo il circuito rappresentato in figura.

Sia β fissato. Sia R il raggio di un cerchio di centro l'origine e passante per i punti $\alpha - i\beta$ e $\alpha + i\beta$. Sia Γ l'arco di cerchio $Re^{i\varphi}$ di estremi i punti $\alpha - i\beta$ e $\alpha + i\beta$.

L'integrale calcolato lungo la retta di Bromwich sarà dunque uguale all'opposto dell'integrale lungo la curva Γ.



Se mostriamo che l'integrale della funzione $\frac{e^{st}}{s}$ calcolato sulla curva Γ è nullo, abbiamo provato che $\int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} \frac{e^{st}}{s}\, ds = 0$.

Proveremo che è nullo il contributo dato dai due archi di cerchio $Re^{i\varphi}$ che congiungono i punti $\alpha - i\beta$ e $-iR$, e i punti $\alpha + i\beta$ e iR rispettivamente.

Sarà quindi sufficiente dimostrare che è nullo l'integrale calcolato su tutto il semicerchio $Re^{i\varphi}$ con $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Cominciamo con l'osservare che la lunghezza $l(R)$ dell'arco che congiunge i punti $\alpha + i\beta$ e iR (uguale alla lunghezza dell'arco che congiunge i punti $\alpha - i\beta$ e $-iR$) è limitata. Infatti, se indichiamo con ϑ l'angolo compreso tra l'asse immaginario e la retta che congiunge l'origine con il punto $\alpha + i\beta$ si osserva che $R = \frac{\alpha}{\sin\vartheta}$ e la lunghezza dell'arco è $l(R) = R\vartheta = \frac{\alpha\vartheta}{\sin\vartheta}$. Per $R \to +\infty$, cioè per $\vartheta \to 0$, questa lunghezza tende ad α ed è perciò limitata. Se s è un punto dell'arco considerato si ha $0 \leq \Re(s) \leq \alpha$ ed essendo $t < 0$ si ottiene $t\Re(s) \leq 0$, e quindi $e^{t\Re(s)} \leq 1$. Pertanto $|\frac{e^{st}}{s}| \leq \frac{1}{R}$ per ogni s appartenente all'arco che stiamo studiando e il modulo dell'integrale

$$\int_{\text{arco}(\alpha+i\beta,Ri)} \frac{e^{st}}{s}\, ds$$

si può maggiorare con $\frac{l(R)}{R}$, che tende a zero per $R \to +\infty$.

Calcoliamo ora l'integrale sul semicerchio completo $Re^{i\varphi}$ con $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Tale integrale è

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{Rt(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}{Re^{i\varphi}} Rie^{i\varphi} d\varphi$$

e il suo modulo è maggiorato da

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt\cos\varphi} d\varphi.$$

Sostituiamo la variabile $\varphi = \xi - \frac{\pi}{2}$. Si ottiene

$$\int_0^{\pi} e^{Rt\sin\xi} d\xi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt\sin\xi} d\xi \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2Rt\xi}{\pi}} d\xi = \frac{\pi}{Rt}(e^{Rt} - 1).$$

Per $R \to +\infty$ l'integrale tende quindi a zero.
(Si è usata la simmetria della funzione seno rispetto a $\frac{\pi}{2}$ e la disuguaglianza $\frac{2}{\pi}\xi \leq \sin\xi$ valida per ogni $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ che è giustificata dalla concavità della funzione seno nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$).
Supponiamo ora $t > 0$. Per il teorema dei residui si ha che l'integrale della funzione $\frac{e^{st}}{s}$ su un circuito contenente l'origine è pari a $2\pi i$ moltiplicato per il residuo nell'origine, che è uguale a 1. Consideriamo il circuito seguente (si faccia riferimento alla figura precedente). Come nel caso precedente sceglieremo R in modo che il circolo di raggio R e di centro l'origine passi per i punti $\alpha - i\beta$ e $\alpha + i\beta$. Questa volta però considereremo l'arco del cerchio che si trova alla sinistra della retta di Bromwich. Indicando come in precedenza con ϑ l'angolo compreso tra l'asse immaginario e la retta che congiunge l'origine con il punto $\alpha + i\beta$, considereremo l'arco di cerchio $Re^{i\varphi}$, con $\frac{\pi}{2} - \vartheta \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi + \vartheta$.
Anche in questo caso si vede facilmente che è nullo il contributo dato dai due archi di cerchio $Re^{i\varphi}$ che congiungono i punti $\alpha - i\beta$ a $-iR$ e $\alpha + i\beta$ a iR rispettivamente.
Infatti come prima si osserva che la lunghezza $l(R)$ dei due archi è limitata, ed essendo $\Re(s) \leq \alpha$ e $t > 0$, il modulo dell'integrale

$$\int_{\text{arco}(\alpha+i\beta,Ri)} \frac{e^{st}}{s}\, ds$$

si maggiora con $l(R)\frac{e^{\alpha t}}{R}$, che tende a zero per $R \to +\infty$.
Calcoliamo infine l'integrale lungo il semicerchio contenuto nel semipiano $\Re(s) \leq 0$.
Il modulo dell'integrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{e^{Rt(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}{Re^{i\varphi}} Rie^{i\varphi} d\varphi$$

si maggiora con

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{Rt\cos\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\xi} d\xi$$

dove si è fatta la sostituzione $\xi = \varphi - \frac{\pi}{2}$.
In modo simile a quanto fatto per il caso $t < 0$ si osserva che quest'ultimo integrale tende a 0 per $R \to +\infty$.
Concludiamo dunque che l'unico contributo non nullo all'integrale sul circuito chiuso è quello dato da $\int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} \frac{e^{st}}{s} ds$ che pertanto risulta essere uguale a $2\pi i$. Dividendo per $2\pi i$ come richiesto dalla formula si ottiene in definitiva

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \to +\infty} \int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} \frac{e^{st}}{s} ds = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}.$$

Dunque $f(t) = u(t)$ come previsto. Si noti che per $t = 0$ la formula fornisce

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \to +\infty} \int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} \frac{1}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i\, d\vartheta = \frac{1}{2}$$

che è uguale a $\frac{1}{2}[u(0^+) + u(0^-)]$.

Come si è visto dall'esempio precedente il calcolo diretto dell'antitrasformata mediante l'uso della formula di Bromwich-Mellin Riemann-Fourier non è facile. Fortunatamente in molti casi è possibile trovare l'antitrasformata di una funzione assegnata utilizzando opportuni artifici e tenendo presente le formule delle trasformate di uso più frequente.

1.9 Calcolo dell'antitrasformata mediante artifici. Funzioni razionali.

Esempio 1.9.1 *Si trovi una funzione f tale che $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s+9} e^{-5s}$.*

Ricordando la formula del ritardo 1.8 e l'esempio 1.5.3 si ottiene

$$u(t) \mapsto \frac{1}{s}; \quad e^{-9t}u(t) \mapsto \frac{1}{s+9}; \quad e^{-9(t-5)}u(t-5) \mapsto e^{-5s}\frac{1}{s+9}.$$

Si ponga attenzione al fatto che la funzione trovata è nulla per $t < 5$. La funzione $g(t) = e^{-9(t-5)}$ non è un'antitrasformata della funzione assegnata, infatti $\mathcal{L}\{g\}(s) = \mathcal{L}\{e^{45}e^{-9t}\}(s) = e^{45}\frac{1}{s+9}$.

Esempio 1.9.2 *Si trovi una funzione f tale che $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{2}{s^2+9}$.*

Ricordando la formula per la trasformata del seno $\sin \omega t \mapsto \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ e scrivendo $F(s) = \frac{2}{3}\frac{3}{s^2+3^2}$ si ottiene $f(t) = \frac{2}{3}\sin 3t$.

Esempio 1.9.3 *Si trovi una funzione f tale che $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{3s+1}{s^2+4}$.*

Scriviamo $F(s) = 3\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}$ da cui $f(t) = 3\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$.

È possibile calcolare l'antitrasformata di una qualsiasi funzione razionale del tipo $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, dove il grado del numeratore N è strettamente inferiore al grado del denominatore D, utilizzando la decomposizione in frazioni semplici. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ gli zeri di D e siano $k_1, k_2, \ldots k_n$ le rispettive molteplicità. Esistono allora dei coeficienti A_1^1, $A_1^2, \ldots, A_1^{k_1}$, A_2^1, $A_2^2, \ldots, \ldots, A_n^1, \ldots, A_n^{k_n}$ tali che $F(s) = \frac{A_1^1}{(s-\alpha_1)} + \frac{A_1^2}{(s-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_1^{k_1}}{(s-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_2^1}{(s-\alpha_2)} + \ldots + \frac{A_n^1}{(s-\alpha_n)} + \ldots + \frac{A_n^{k_n}}{(s-\alpha_n)^{k_n}}$. Il calcolo dell'antitrasformata della funzione F si riduce quindi al calcolo dell'antitrasformata dei singoli addendi.
Ricordando l'esempio 1.5.2 si ha che $\mathcal{L}\{t^k u(t)\} = \frac{k!}{s^{k+1}}$ perciò l'antitrasformata di $\frac{1}{(s-\alpha)^n}$ è

$$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\alpha t} u(t).$$

In definitiva l'antitrasformata della funzione F si potrà scrivere come

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_i^j}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\alpha_i t}.$$

Esempio 1.9.4 *Si trovi una funzione f tale che $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s(s+6)^2}$.*

Decomponiamo la funzione F in frazioni semplici. Avremo

$$\frac{1}{s(s+6)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+6} + \frac{C}{(s+6)^2}. \tag{1.11}$$

Per calcolare i coefficienti si può procedere in diversi modi. Ad esempio si può risolvere l'equazione

$$A(s+6)^2 + Bs(s+6) + Cs = 1$$

che si riduce al sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 12A + 6B + C = 0 \\ 36A = 1 \end{cases} ;$$

da cui si ricava $A = \frac{1}{36}, B = -\frac{1}{36}, C = -\frac{1}{6}$.
Un altro metodo è quello di moltiplicare la 1.11 per s da cui si ottiene

$$sF(s) = A + B\frac{s}{s+6} + C\frac{s}{(s+6)^2}.$$

Si avrà allora

$$A = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

cioè $A = \frac{1}{36}$. In modo analogo si può calcolare C. Si moltiplichi la 1.11 per $(s+6)^2$; si ottiene

$$(s+6)^2 F(s) = A\frac{(s+6)^2}{s} + B(s+6) + C.$$

Si avrà allora

$$C = \lim_{s\to -6}(s+6)^2 F(s)$$

e quindi $C = -\frac{1}{6}$. Per ottenere B dobbiamo calcolare la derivata della funzione $(s+6)^2 F(s)$. Si avrà allora

$$\frac{d}{ds}(s+6)^2 F(s) = (s+6)[\ldots] + B$$

e quindi

$$B = \lim_{s\to -6}\frac{d}{ds}(s+6)^2 F(s),$$

nel nostro caso $B = -\frac{1}{36}$.
In generale sia α_i una radice di molteplicità k_i. Per determinare i coefficienti $A_i^{k_i}$, A^{k_i-1},..., A^{k_i-j}, ..., $A^{k_i-(k_i-1)} = A^1$ rispettivamente relativi alle frazioni $\frac{1}{(s-\alpha_i)^{k_i}}$, $\frac{1}{(s-\alpha_i)^{k_i-1}}$, ..., $\frac{1}{(s-\alpha_i)^{k_i-j}}$, ..., $\frac{1}{(s-\alpha_i)}$ si possono usare le formule

$$\begin{aligned}
A_i^{k_i} &= \lim_{s\to\alpha_i}(s-\alpha_i)^{k_i}F(s);\\
A_i^{k_i-1} &= \lim_{s\to\alpha_i}\frac{d}{ds}[(s-\alpha_i)^{k_i}F(s)];\\
&\ldots;\\
A_i^{k_i-j} &= \frac{1}{j!}\lim_{s\to\alpha_i}\frac{d^j}{ds^j}[(s-\alpha_i)^{k_i}F(s)];\\
&\ldots;\\
A_i^1 &= \frac{1}{(k_i-1)!}\lim_{s\to\alpha_i}\frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}}[(s-\alpha_i)^{k_i}F(s)].
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Non sempre però l'uso di tali formule è agevole e talvolta è più conveniente ricorrere a metodi diretti.
Se il polinomio al denominatore ha zeri non reali e la funzione F è reale i coefficienti relativi alle coppie di zeri coniugati sono anch'essi tra loro coniugati. Questa osservazione permette spesso di diminuire i tempi di calcolo.

Esempio 1.9.5 *Si trovi un'antitrasformata della funzione* $F(s) = \frac{s-1}{(s^2+1)^2}$.

Si può scrivere

$$F(s) = \frac{A}{s-i} + \frac{B}{(s-i)^2} + \frac{C}{s+i} + \frac{D}{(s+i)^2}.$$

Usiamo ad esempio la formula 1.12 :

$$\frac{d}{ds}\left[(s-i)^2 \frac{s-1}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{1}{(s+i)^2} - 2\frac{s-1}{(s+i)^3}.$$

Calcolando il $\lim_{s\to i}$ si ottiene $A = \frac{i}{4}$.
Calcoliamo ora $B = \lim\limits_{s\to i} \dfrac{s-1}{(s+i)^2} = \dfrac{1-i}{4}$.
Non è necessario calcolare C e D, infatti grazie all'osservazione fatta sappiamo che $C = \overline{A} = -\frac{i}{4}$ e $D = \overline{B} = \frac{1+i}{4}$.
Avremo allora

$$f(t) = \frac{i}{4}e^{it} + \frac{1-i}{4}te^{it} - \frac{i}{4}e^{-it} + \frac{1+i}{4}te^{-it} = -\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\sin t + \frac{1}{2}t\cos t.$$

Il caso più semplice è quello in cui ogni zero ha molteplicità 1. In questo caso i coefficienti A_i^1 sono esattamente i residui della funzione $F = \frac{N}{D}$ nel punto. Ricordando la formula per il calcolo dei residui di una funzione razionale in un polo semplice α_i, $R(F;\alpha_i) = \frac{N(\alpha_i)}{D'(\alpha_i)}$, si ottiene la seguente formula, nota come *formula di Heaviside* :

Teorema 1.9.6 *(Formula di Heaviside) Sia* $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ *una funzione razionale dove il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore, e supponiamo che* D *abbia soltanto zeri semplici* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$*. Allora un'antitrasformata della* F *è*

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{N(\alpha_i)}{D'(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}\right) u(t).$$

Vale una versione della formula di Heaviside anche nel caso in cui gli zeri abbiano molteplicità maggiore di uno, ma la sua applicazione non è molto agevole. In questo caso la formula diventa

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} R\left(F(s)e^{st};\alpha_i\right)\right) u(t).$$

Esempio 1.9.7 *Si trovi un'antitrasformata della funzione*

$$F(s) = \frac{1}{s^4 - s^3 + 4s^2 - 4s}.$$

Gli zeri del denominatore sono tutti semplici: $0, 1, 2i, -2i$. La derivata del denominatore è $4s^3 - 3s^2 + 8s - 4$. Utilizzando la formula di Heaviside si ottiene

$$f(t) = (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1+2i}{40}e^{2it} + \frac{1-2i}{40}e^{-2it})u(t) =$$

$$= (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t)u(t).$$

1.10 Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie.

Sia dato un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n a coefficienti costanti, con punto iniziale in 0. Tale problema si può scrivere come

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_0 y(t) = f(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ . \\ . \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases}.$$

Applichiamo l'operatore di Laplace all'equazione

$$y^{(n)}(t) + c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_0 y(t) = f(t).$$

Otteniamo, grazie al corollario 2.6.1 e usando le condizioni iniziali,

$$s^n Y(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \ldots - y_{n-1} +$$

$$+c_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y_0 - \ldots - y_{n-2}] + \ldots + c_0 Y(s) = F(s).$$

Poniamo

$$R_2(s) = \frac{1}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \ldots + c_1 s + c_0}$$

e

$$R_1(s) = R_2(s)\big[y_0(s^{n-1} + c_{n-1}s^{n-2} + c_{n-2}s^{n-3} + \ldots + c_1) +$$

$$+y_1(s^{n-2}+c_{n-1}s^{n-3}+\ldots+c_2)+\ldots+y_{n-2}(s+c_{n-1})+y_{n-1}\big].$$

Si ottiene allora

$$Y(s)=R_1(s)+F(s)R_2(s).$$

Per ottenere la soluzione del problema possiamo antitrasformare. Poiché R_1 e R_2 sono funzioni razionali in cui il denominatore ha sempre grado maggiore del numeratore, possiamo calcolare le antitrasformate r_1 e r_2. Ricordando inoltre il teorema 1.7.1 sulla trasformata del prodotto di convoluzione si potrà scrivere

$$y(t)=r_1(t)+r_2*f(t).$$

Supponiamo ora che l'equazione sia omogenea, cioè che $f(t)=0$. In questo caso la soluzione si riduce a $y(t)=r_1(t)$. Tale soluzione si dice la *risposta libera* del problema.
Se invece l'equazione è completa ma le condizioni iniziali sono tutte nulle, cioè se $y_0=y_1=\ldots=y_{n-1}=0$ la soluzione si riduce a $y(t)=r_2*f(t)$. Tale soluzione si dice la *risposta forzata* del problema.
La soluzione del problema generale risulta dunque essere somma della risposta libera e della risposta forzata.

Esempio 1.10.1

$$\begin{cases} x''+3x'+2x=e^t \\ x(0)=0 \\ x'(0)=1 \end{cases}.$$

Trasformando si ottiene

$$s^2X-0-1+3(sX-0)+2X=\frac{1}{s-1}$$

e quindi $X=\dfrac{s}{(s^2+3s+2)(s-1)}$. Decomponendo in frazioni semplici si ottiene

$$X=\frac{1}{6}\frac{1}{s-1}-\frac{2}{3}\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$$

e antitrasformando si ha

$$x=\frac{1}{6}e^t-\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-t}.$$

Naturalmente un problema di questo tipo può essere risolto in modo molto semplice considerando l'equazione caratteristica associata all'equazione, trovando le soluzioni dell'equazione omogenea e infine una soluzione particolare dell'equazione completa. Se però il termine noto $f(x)$ non è una funzione continua, tali tecniche non sono utilizzabili.

Esempio 1.10.2 *Sia*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \textit{se } t < 0 \textit{ oppure } t > 2 \\ 1 & \textit{se } t \in [0, 1) \\ -1 & \textit{se } t \in [1, 2] \end{cases} ;$$

si risolva il problema

$$\begin{cases} x'' + x = f \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} .$$

La funzione f si può scrivere utilizzando la funzione di Heaviside come $f(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$. Calcoliamo $R_2(s) = \frac{1}{1+s^2}$. La sua antitrasformata è $r_2(t) = \sin t$. Poiché le condizioni iniziali sono nulle la soluzione del problema è la risposta forzata $x(t) = r_2 * f(t) = \sin t * f(t)$. Otteniamo allora

$$x(t) = \int_0^t f(t-\tau) \sin \tau d\tau =$$

$$= \left(\int_0^t \sin \tau d\tau \right) u(t) - 2 \left(\int_0^{t-1} \sin \tau d\tau \right) u(t-1) + \left(\int_0^{t-2} \sin \tau d\tau \right) u(t-2) =$$

$$= (1 - \cos t) u(t) - 2(1 - \cos(t-1)) u(t-1) + (1 - \cos(t-2)) u(t-2).$$

In modo simile si possono risolvere anche sistemi lineari del tipo $x' = Ax + f$, dove x è un vettore (colonna) di $\mathbb{R}^n$, A è una matrice $n \times n$ e f è una funzione vettoriale in n componenti. Un tale problema può sempre essere ricondotto ad un problema in un'unica equazione di ordine n, ma può anche essere risolto direttamente.

Esempio 1.10.3

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 4x - 2y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Trasformando direttamente il sistema, si ottiene

$$\begin{cases} sX - 1 = 2Y \\ sY = 4X - 2Y \end{cases}$$

e, risolvendo il sistema algebrico,

$$\begin{cases} X = \dfrac{s+2}{s^2 + 2s - 8} \\ Y = \dfrac{4}{s^2 + 2s - 8} \end{cases}$$

da cui $x(t) = \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$ e $y(t) = \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-4t}$.

Concludiamo con un esempio di applicazione della trasformata di Laplace ad un'equazione integrale.

Esempio 1.10.4 *Si risolva l'equazione*

$$y(t) = \cos t + \int_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau$$

per $t > 0$.

L'equazione proposta si può scrivere come

$$y(t) = \cos t + t * y(t).$$

Trasformando si ha

$$Y(s) = \frac{s}{1+s^2} + \frac{1}{s^2}Y(s)$$

da cui

$$Y(s) = \frac{s^3}{(s^2-1)(s^2+1)}$$

e quindi

$$Y(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right)$$

e in definitiva

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(e^t t + e^{-t} + e^{it} + e^{-it}\right) = \frac{1}{2}(\cosh t + \cos t).$$

1.11 Applicazioni ai circuiti elettrici

Consideriamo un circuito elettrico nel quale sono inseriti, in serie, una resistenza R, una capacità C, un'induttanza L, una forza elettromotrice V e un interruttore. Indichiamo con $i(t)$ la corrente che percorre il circuito e con $q(t)$ la carica del condensatore all'istante t. Consideriamo come istante iniziale $t_0 = 0$ l'istante in cui viene chiuso l'interruttore e indichiamo con q_0 la carica iniziale del condensatore. Avremo allora

$$q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau.$$

L'equazione di equilibrio è

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q(t) = v(t) \quad t > 0$$

che si può anche scrivere

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + \frac{q_0}{C} = v(t) \quad t > 0. \tag{1.13}$$

Supponiamo di voler calcolare la corrente $i(t)$. Se la tensione $v(t)$ è una funzione differenziabile l'equazione 1.13 può essere differenziata a membro a membro e si ottiene un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

$$Lx'' + Rx' + \frac{1}{C}x = v'.$$

Spesso accade però che la funzione v non sia neppure continua; in questo caso si può applicare direttamente l'operatore di Laplace all'equazione integrodifferenziale 1.13. Poiché $i(0^+) = 0$ e ricordando il teorema 1.7.3 si ottiene

$$sLI(s) + RI(s) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{1}{sC}q_0 = V(s),$$

da cui

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL + R + \frac{1}{sC}} - \frac{q_0}{sC(sL + R + \frac{1}{sC})}.$$

La quantità $T(s) = \frac{1}{sL+R+\frac{1}{sC}}$ dipende soltanto dalle caratterisitiche del circuito RLC e si chiama *ammettenza di trasferimento.* Potremo allora scrivere

$$I(s) = T(s)V(s) - \frac{q_0}{sC}T(s). \tag{1.14}$$

Supponiamo ora di conoscere la corrente e di voler calcolare la tensione. Dalla 1.14 si ottiene

$$V(s) = \frac{1}{T(s)}I(s) + \frac{q_0}{sC}.$$

La funzione reciproca dell'ammettenza di trasferimento $\frac{1}{T(s)} = sL + R + \frac{1}{sC}$ si chiama *impedenza di trasferimento.*

Esempio 1.11.1 *Determinare la corrente che percorre un circuito RLC nel quale* $R = 2\Omega,\ C = \frac{1}{17}F,\ L = 1H,\ q_0 = 0,\ v(t) = e^{-2t}$.

Calcoliamo l'ammettenza di trasferimento:

$$T(s) = \frac{1}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s^2 + 2s + 17}.$$

Si ha $I(s) = T(s)V(s)$ e poiché $V(s) = \frac{1}{s+2}$ si ottiene, decomponendo in frazioni semplici,

$$I(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1-4i} + \frac{C}{s+1+4i}.$$

Calcolando i coefficienti si ottiene

$$I(s) = -\frac{2}{17}\frac{1}{s+2} + -\frac{15}{136}i\frac{1}{s+1-4i} +$$

$$+\frac{15}{136}i\frac{1}{s+1+4i} + \frac{1}{17}\frac{1}{s+1-4i} + \frac{1}{17}\frac{1}{s+1+4i}$$

e antitrasformando

$$i(t) = -\frac{2}{17}e^{-2t} + \frac{15}{68}e^{-t}\sin 4t + \frac{2}{17}e^{-t}\cos 4t.$$

Un altro metodo per ottenere lo stesso risultato è quello di utilizzare il teorema sul prodotto di convoluzione. Si ha infatti

$$i = \mathcal{L}^{-1}\{T\} * v.$$

Per calcolare velocemente l'antitrasformata di T si può scrivere

$$T(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 17} = \frac{s}{(s+1)^2 + 16} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 16} - \frac{1}{4}\frac{4}{(s+1)^2 + 16}$$

e pertanto

$$\mathcal{L}^{-1}\{T\}(t) = e^{-t}\cos 4t - \frac{1}{4}e^{-t}\sin 4t.$$

Otteniamo infine

$$i(t) = \int_0^t (e^{-\tau}\cos 4\tau - \frac{1}{4}e^{-\tau}\sin 4\tau)e^{-2(t-\tau)}d\tau =$$

$$= -\frac{2}{17}e^{-2t} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{34})e^{-t}\sin 4t + \frac{2}{17}e^{-t}\cos 4t.$$

1.12 Applicazioni alle equazioni alle derivate parziali.

La trasformata di Laplace è uno strumento molto utile anche nello studio delle equazioni alle derivate parziali. Considereremo funzioni in due variabili del tipo $f(x,t)$, definite su opportuni sottoinsiemi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ del tipo $\Omega = A \times \mathbb{R}$. Le funzioni si supporranno sempre nulle per ogni valore di x se $t < 0$. In questo modo sarà possibile considerare la trasformazione rispetto alla variabile t, considerando x come un parametro. Si avrà dunque $\mathcal{L}\{f(x,t)\}(x,s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(x,t)\, dt = F(x,s)$. Per quanto riguarda le derivate si avrà

$$\mathcal{L}\{\frac{\partial f}{\partial t}\}(s) = sF(x,s) - f(x,0^+),$$

mentre

$$\mathcal{L}\{\frac{\partial f}{\partial x}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\, dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{+\infty} e^{-st} f(x,t)\, dt = \frac{\partial}{\partial x}F(x,s).$$

Naturalmente si è implicitamente supposto che sia lecito il passaggio del segno di derivata fuori dal segno integrale.
Vediamo un semplice esempio.

Esempio 1.12.1 *Si consideri il problema alle derivate parziali:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial t}; \\ u(x,0^+) = x; \\ u(0,t) = t. \end{cases} \tag{1.15}$$

Si vuole cioè trovare una funzione $u(x,t)$ definita su un opportuno dominio di $\mathbb{R}^2$, che soddisfa l'equazione $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, soddisfa la condizione iniziale $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = x$ per ogni x, e soddisfa la condizione al contorno $u(0,t) = t$ per ogni t. Applicando l'operatore di Laplace all'equazione si ottiene l'equazione trasformata:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,s) = sU(x,s) - u(x,0^+).$$

Questa è un'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine nella variabile x, nella quale s appare come parametro; la condizione iniziale impone $u(x,0^+) = x$, dunque si ottiene l'equazione

$$\frac{dU}{dx}(x) = sU(x) - x,$$

che ha per soluzione la famiglia di funzioni

$$U(x) = ce^{sx} + \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

Il parametro c è costante rispetto a x, ma può ben dipendere da s. Le funzioni che otteniamo sono dunque del tipo

$$U(x,s) = c(s)e^{sx} + \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

La condizione $u(0,t) = t$, trasformata, diventa $U(0,s) = \frac{1}{s^2}$, da cui si ottiene $U(x,s) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}$ e antitrasformando $u(x,t) = x + t$.

Vediamo ora un esempio di applicazione delle traformate di Laplace all'equazione della corda vibrante.

Esempio 1.12.2 *Si consideri il problema alle derivate parziali:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} & x > 0,\ t > 0; \\ y(x, 0^+) = 0; & \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0^+) = 0; & \\ y(0,t) = f(t) & (f(0) = 0); \\ \lim\limits_{x \to +\infty} y(x,t) = 0. & \end{cases} \tag{1.16}$$

L'equazione rappresenta il moto $y(x,t)$ lungo l'asse y di un punto di una corda di posizione x al tempo t, corda inizialmente ferma lungo l'asse x nella quale viene mosso l'estremo sinistro secondo l'andamento $f(t)$. Il parametro reale positivo a rappresenta la radice quadrata del rapporto tra la tensione della corda e la densità lineare della massa $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

L'equazione trasformata, imponendo le condizioni iniziali, si riduce ad un'equazione ordinaria lineare del secondo ordine:

$$s^2 Y = a^2 \frac{d^2 Y}{dx^2}.$$

La soluzione generale di tale equazione è

$$Y(x,s) = c_1 e^{-\frac{s}{a}x} + c_2(s) e^{\frac{s}{a}x}.$$

Imponendo le condizioni al contorno si ottiene la soluzione

$$Y(x,s) = F(s)e^{-\frac{x}{a}s}.$$

Antitrasformando, tenendo presente la formula della funzione traslata 1.8, si ottiene

$$y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right) u\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

La soluzione ci dice che la corda resta ferma nel punto x per un tempo pari a $\frac{x}{a}$, dopodiché esibisce nel punto lo stesso moto che viene impresso nell'estremo sinistro della corda.

Il seguente esempio considera l'equazione del calore su un filo infinito.

Esempio 1.12.3 *Si consideri il problema alle derivate parziali:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \textit{per } 0 < x < +\infty \textit{ e } t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = \varphi(t) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x,t) = 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

L'equazione rappresenta il flusso di calore in un filo infinito. La funzione $u(x,t)$ rappresenta la temperatura nel punto x al tempo t. La temperatura iniziale è nulla su tutto il filo. La temperatura nell'estremo sinistro viene modificata nel tempo secondo la legge $\varphi(t)$.

Trasformando parzialmente secondo la variabile t si ottiene

$$\begin{cases} sU(x,s) - \dfrac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} = 0 \\ U(0,s) = \Phi(s) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} U(x,s) = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni dell'equazione ordinaria lineare

$$sy(x) - y''(x) = 0$$

sono del tipo

$$y(x) = ae^{\sqrt{s}x} + be^{-\sqrt{s}x};$$

cioè $U(x,s) = ae^{\sqrt{s}x} + be^{-\sqrt{s}x}$. Applicando la condizione iniziale $U(0,s) = \Phi(s)$ si ottiene $a + b = \Phi(s)$. D'altra parte, essendo $\lim_{x\to+\infty} U(x,s) = 0$

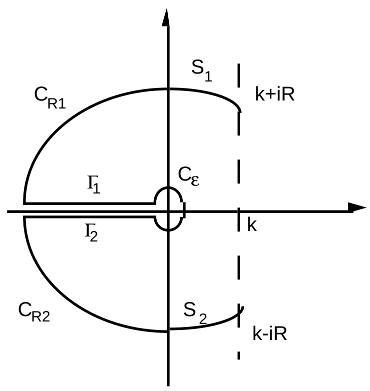
necessariamente è $a = 0$ e quindi $b = \Phi(s)$ e $U(x,s) = \Phi(s)e^{-\sqrt{s}x}$. La nostra soluzione sarà perciò

$$u(x,t) = \varphi * \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}x}\}(t).$$

Non ci resta che calcolare l'antitrasformata della funzione $F(s) = e^{-\sqrt{s}x}$. Ricordando la formula di Riemann-Fourier si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{st} e^{-\sqrt{s}x} ds.$$

Supporremo $t > 0$ (nel caso opposto il calcolo è semplice).
Si noti che la funzione $e^{-\sqrt{s}x}$ è polidroma avendo un punto di diramazione in 0. Effettuiamo perciò un "taglio" nel semiasse reale negativo. Avremo allora $\sqrt{s} = \sqrt{\rho}e^{\frac{i\vartheta}{2}}$ se $s = \rho e^{i\vartheta}$. Consideriamo un circuito che comprende il segmento $[k - iR, k + iR]$, l'archetto di raccordo S_1, l'arco di cerchio nel secondo quadrante $C_{R_1} = \{Re^{i\vartheta} : \frac{\pi}{2} \le \vartheta < \pi\}$, il segmento lungo il taglio nel secondo quadrante $\Gamma_1 = [-R, -\epsilon]$, il circoletto di raggio ϵ $C_\epsilon = \{\epsilon e^{i\vartheta} : \pi > \vartheta > -\pi\}$, il segmento lungo il taglio nel terzo quadrante $[-\epsilon, -R]$, l'arco di cerchio nel terzo quadrante $C_{R_2} = \{Re^{i\vartheta} : -\pi < \vartheta \le -\frac{\pi}{2}\}$, l'archetto di raccordo S_2.



Lungo gli archetti S_1 e S_2 il contributo è infinitesimo per $R \to +\infty$. Infatti, se $s \in S_1$ o $s \in S_2$ si ha $\Re(s) \le k$ e $\Re(\sqrt{s}) \ge \frac{\sqrt{2\rho}}{2}$. Pertanto il modulo di $e^{st - x\sqrt{s}}$ si maggiora con $e^{\alpha t - \frac{x\rho}{\sqrt{2}}}$, una quantità infinitesima per $\rho \to +\infty$. L'integrale calcolato nel circoletto C_ϵ è invece infinitesimo per $\epsilon \to 0^+$ essendo

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\vartheta} t} e^{-\sqrt{\epsilon} e^{\frac{i\vartheta}{2}} x} \epsilon i e^{i\vartheta} d\vartheta = 0.$$

Lungo gli archi C_{R_1} e C_{R_2} il contributo è pure infinitesimo per $R \to +\infty$. Vediamo ad esempio il caso $t > 0$ sull'arco C_{R_1}. Il modulo della funzione integranda sul cerchio C_{R_1} si può scrivere nella forma $e^{\rho t\cos\vartheta - \sqrt{\rho}x\cos\frac{\vartheta}{2}}$; e $\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \pi$. Ora, se $\frac{3}{4}\pi \le \vartheta \le \pi$ si ha $\cos\vartheta \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\cos(\frac{\vartheta}{2}) \ge 0$, perciò $e^{\rho t\cos\vartheta - \sqrt{\rho}x\cos\frac{\vartheta}{2}} \le e^{-\rho t\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Se invece $\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{3}{4}\pi$ si ha $\cos\vartheta \le 0$ e $\cos(\frac{3\pi}{8}) \le \cos(\frac{\vartheta}{2}) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$, perciò $e^{\rho t\cos\vartheta - \sqrt{\rho}x\cos\frac{\vartheta}{2}} \le e^{-\sqrt{\rho}\cos(\frac{3\pi}{8})x}$. Dunque si conclude che uniformemente rispetto a ϑ si ha $e^{\rho t\cos\vartheta - \sqrt{\rho}x\cos\frac{\vartheta}{2}} \le \max\{e^{-\sqrt{\rho}\cos(\frac{3\pi}{8})x}, e^{-\frac{\rho t}{\sqrt{2}}}\}$. Perciò il modulo è infinitesimo per $\rho \to +\infty$. In modo simile si ragiona nell'altro caso.
Valutiamo i contributi lungo i segmenti Γ_1 e Γ_2.
Lungo il segmento Γ_1 l'argomento di s è π, dunque $s = -p$, $\sqrt{s} = \sqrt{p}i$ avendo posto $p := |s|$. Si ottiene allora

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-i\sqrt{p}x}dp.$$

Lungo il segmento Γ_2 l'argomento di s è $-\pi$, dunque $s = -p$, $\sqrt{s} = -\sqrt{p}i$. Si ottiene allora

$$-\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{i\sqrt{p}x}dp.$$

Dunque

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{st}e^{-\sqrt{s}x}ds = -\frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-i\sqrt{p}x}dp - \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{i\sqrt{p}x}dp\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{1}{2i}\left(e^{i\sqrt{p}x} - e^{-i\sqrt{p}x}\right)dp = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin(\sqrt{p}x)dp =$$

e mediante la sostituzione $p = u^2$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} ue^{-u^2t}\sin(ux)du.$$

Per calcolare l'ultimo integrale si può procedere nel modo seguente:

$$I(x,t) = \int_0^{+\infty} ue^{-u^2t}\sin(ux)du = \left[-\frac{1}{2t}e^{-u^2t}\sin(ux)\right]_0^{+\infty} +$$

$$+\frac{x}{2t}\int_0^{+\infty} e^{-u^2t}\cos(ux)du = \frac{x}{2t}\int_0^{+\infty} e^{-u^2t}\cos(ux)du.$$

Derivando rispetto a x la funzione $\frac{2t}{x}I(x,t)$ si ottiene

$$\frac{d}{dx}\left(I(x,t)\frac{2t}{x}\right) = -\int_0^{+\infty} ue^{-u^2t}\sin(ux)du = -I(x,t);$$

cioè

$$\frac{dI}{dx}\frac{2t}{x} - I\frac{2t}{x^2} = -I$$

da cui

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2t}$$

e integrando

$$I(x,t) = A(t)xe^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Per determinare $A(t)$ osserviamo che

$$\frac{dI}{dx} = A(t)e^{-\frac{x^2}{4t}} + A(t)x(-\frac{x}{2t})e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

e quindi $\frac{dI}{dx}(0,t) = A(t)$. D'altra parte

$$\frac{dI}{dx} = \int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2t}\cos(ux)du$$

e per $x = 0$

$$\frac{dI}{dx}(0,t) = \int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2t}du =$$

$$= \left[-\frac{u}{2t}e^{-u^2t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{2t}e^{-u^2t}du = \frac{\sqrt{\pi}}{4t\sqrt{t}}$$

cioè $A(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4t\sqrt{t}}$ e

$$I(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4t\sqrt{t}}xe^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Si ottiene allora

$$f(t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

e la soluzione del problema è

$$u(x,t) = \varphi * \frac{x}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

1.13 Il comportamento asintotico della trasformata.

In molti casi è difficile o addirittura impossibile calcolare esplicitamente la trasformata o l'antitrasformata di una funzione assegnata. Risulta quindi molto utile poter studiare alcune proprietà della funzione trasformata F utilizzando la conoscenza della funzione f o, viceversa, poter studiare alcune proprietà della funzione f utilizzando proprietà note della funzione trasformata F, senza ricorrere al calcolo esplicito delle funzioni che interessano. Un teorema che ci dà informazioni sulla funzione trasformata F, assumendo note le proprietà della funzione f si dice *teorema abeliano.*
Un teorema che ci dà informazioni sulla funzione f, assumendo note le proprietà della funzione trasformata F si dice *teorema tauberiano.*
Un primo esempio di teorema abeliano può essere considerato il teorema 1.4.4.
Un altro teorema abeliano è il seguente:

Teorema 1.13.1 *Sia f una funzione trasformabile e supponiamo che esista $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$; allora esiste anche il $\lim\limits_{s\to 0^+} sF(s)$ (supponiamo per comodità $s \in \mathbb{R}$) e vale*

$$\lim_{s\to 0^+} sF(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t).$$

Se esiste $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$ allora esiste anche il $\lim\limits_{s\to+\infty} sF(s)$ e vale (con $s \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{s\to+\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0^+} f(t).$$

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema nell'ipotesi aggiuntiva in cui la funzione f sia derivabile su $]0, +\infty[$ e la funzione f' sia assolutamente trasformabile. Supponiamo che esista $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ e proviamo che esiste pure $\lim\limits_{s\to 0^+} sF(s)$.
Si ha per il Teorema 1.6.2 $\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0^+)$, da cui

$$\lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}\{f'\}(s) = \lim_{s\to 0^+} sF(s) - f(0^+).$$

Usando la definizione di trasformata si ottiene anche

$$\lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}\{f'\}(s) = \lim_{s\to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lim_{s\to 0^+} e^{-st} f'(t)dt = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0^+);$$

da cui la tesi, purché si possa giustificare il passaggio del limite sotto il segno integrale. Per fare ciò ricorreremo al teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Sia λ_0 l'ascissa di assoluta convergenza della f'. Sia $\lambda > \lambda_0$ e si ponga $g(t) = e^{-\lambda t}|f'(t)|$. Poichè la funzione f' è assolutamente trasformabile la funzione $g(t)$ è integrabile su $[\lambda, +\infty]$ e domina la funzione $e^{-st}f'(t)$ (cioè $|e^{-st}f'(t)| \leq g(t)$ se $s \geq \lambda$). Per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si può portare il segno di limite all'interno del segno integrale.
Supponiamo ora che esista $\lim_{t\to 0^+} f(t)$. Sempre nell'ipotesi semplificata si avrà

$$\lim_{s\to+\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0^+} \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) + f(0^+) = f(0^+);$$

tenendo conto del Teorema 1.4.4 applicato alla funzione f'. □

Il teorema 1.13.1 ci permette tra l'altro di calcolare $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ e $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ utilizzando le trasformate se è noto che tali limiti esistono. Questo può essere molto importante se ad esempio la funzione f è la soluzione di un' equazione differenziale. Si noti però che la conoscenza a priori dell'esistenza del limite è essenziale. Ad esempio si consideri la funzione $f(t) = \operatorname{sen} t$. La trasformata di f è $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ e quindi $\lim_{s\to 0^+} sF(s) = 0$, mentre non esiste $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

Esempio 1.13.2 *Sia* $F(s) = \frac{\tanh s}{s(s^2+1)}$. *Si trovino* $f(0)$ *e* $f'(0)$, *supposti esistenti.*

Poiché supponiamo esistenti $f(0^+)$ e $f'(0^+)$ si può applicare il Teorema 1.13.1. Si ha allora

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to+\infty} sF(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{\tanh s}{(s^2+1)} = 0.$$

Inoltre $\mathcal{L}\{f'\} = sF - f(0) = \frac{\tanh s}{(s^2+1)}$, pertanto

$$\lim_{t\to 0^+} f'(t) = \lim_{s\to+\infty} s\mathcal{L}\{f'\} = \lim_{s\to+\infty} \frac{s\tanh s}{(s^2+1)} = 0.$$

Dunque $f(0) = f'(0) = 0$.

1.14 Esercizi

Esercizio 1.14.1 *Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione*

$$f(t) = t^{-\frac{1}{2}}.$$

(Sol. $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$*.)*

Esercizio 1.14.2 *Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione*

$$f(t) = n \quad \textit{se } n-1 < t \leq n \textit{ per } n \in \mathbb{N}.$$

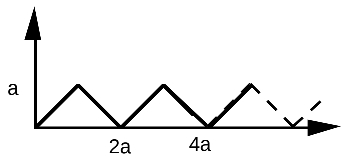
(Sol. $F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{1-e^{-s}}$*.)*

Esercizio 1.14.3 *Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione*

$$f(t) = (-1)^{[t]}$$

dove $[t] = \min\{n \in \mathbb{N} : t \geq n\}$ *è la parte intera di* t *(onda quadra).*

Esercizio 1.14.4 *Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione* $f(t)$ *rappresentata in figura (onda triangolare):*



(Sol. $F(s) = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{s}{2}$).

Esercizio 1.14.5 *Si calcoli l'antitrasformata della funzione*

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + a^3} \quad \textit{con } a \in \mathbb{R}.$$

(Sol. $f(t) = \frac{1}{3a^2}\left(e^{-at} - e^{\frac{a}{2}t}\cos(\frac{a}{2}\sqrt{3}t) + \sqrt{3}e^{\frac{a}{2}t}\sin(\frac{a}{2}\sqrt{3}t)\right)$*.)*

Esercizio 1.14.6 *Si calcoli l'antitrasformata della funzione*

$$F(s) = \frac{e^{-as}}{s^2} \quad \textit{con } a \in \mathbb{R}.$$

(Sol. $f(t) = (t-a)u(t-a)$*.)*

Esercizio 1.14.7 *Si calcoli l'antitrasformata della funzione*

$$F(s) = \frac{s^2+3}{(s^2+2s+2)^2}.$$

(Sol. $f(t) = e^{-t}\left(t(-\frac{3}{2}\cos t - \sin t) + \frac{5}{2}\sin t\right)$ *.)*

Esercizio 1.14.8 *Si calcoli l'antitrasformata della funzione*

$$F(s) = \; arctan(\frac{1}{s}).$$

(Sol. $f(t) = \frac{\sin t}{t}$*.)*

Esercizio 1.14.9 *Si calcoli l'antitrasformata della funzione*

$$F(s) = \ln \frac{s^2+1}{(s+2)(s-3)}.$$

(Sol. $f(t) = \frac{1}{t}(e^{3t} + e^{-2t} - 2\cos t)$*.)*

Esercizio 1.14.10 *Si calcoli l'antitrasformata della funzione*

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)\sqrt{s}}.$$

(Sol. $f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du$*).*

Esercizio 1.14.11 *Si calcolino le antitrasformate delle funzioni*

$$F(s) = \frac{s(1+e^{-3s})}{s^2+\pi^2} \qquad e$$

$$G(s) = \frac{s(1+e^{-3s})}{(1-e^{-3s})(s^2+\pi^2)}.$$

(Sol. $g(t)|_{[k,k+3)} = \cos \pi t$ *per* $k \in \mathbb{N}$*) .*

Esercizio 1.14.12 *Risolvere con la trasformata di Laplace il problema*

$$\begin{cases} x'' + 4x' + 13x = te^{-t}; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 2. \end{cases}$$

(Sol. $x(t) = \frac{1}{50}((5t-1)e^{-t} + e^{-2t}(\cos 3t + 32 \sin 3t))$*.)*

Esercizio 1.14.13 *Risolvere con la trasformata di Laplace il problema*

$$\begin{cases} x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0; \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0; \\ x'''(0) = 1. \end{cases}$$

(Sol. $x(t) = \frac{1}{16}(\sin 2t - 2t \cos 2t)$*.)*

Esercizio 1.14.14 *Risolvere con la trasformata di Laplace il problema*

$$\begin{cases} x''' + 2x'' + x' = f(t); \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases}$$

dove $f(t)$ *è una funzione assegnata. (Sol.* $x(t) = \int_0^t [1-(1+t-u)e^{-(t-u)}]f(u)du.$*)*

Esercizio 1.14.15 *Risolvere con la trasformata di Laplace il problema*

$$\begin{cases} x'' + tx' + x = 0; \\ x(0) = 1; \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

(Sol. $x(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}.$*)*

Esercizio 1.14.16 *Risolvere con la trasformata di Laplace il problema*

$$\begin{cases} x' = -4x - y + e^{-t}; \\ y' = x - 2y; \\ x(o) = y(0) = 0 \end{cases}.$$

(Sol. $x(t) = -\frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{2}te^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-t}; y(t) = -\frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{2}te^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-t}.$*)*

Negli esercizi che seguono si chiede di risolvere un circuito di equazione

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} + Ri + \dfrac{1}{C}q(t) = e(t); \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

con $q(0) = 0$.

Esercizio 1.14.17 $L = 1, R = 0, C = 10^{-4}$;

$$e(t) = \begin{cases} 100 & se\ 0 \le t < 2\pi \\ 0 & se\ t \ge 2\pi \end{cases}.$$

(Sol. $i(t) = (1 - u(t - 2\pi)) \sin 100t$*).*

Esercizio 1.14.18 $L = 1, R = 100, C = 4\ 10^{-4}$;

$$e(t) = \begin{cases} 50t & se\ 0 \le t < 1; \\ 0 & se\ t > 1 \end{cases}.$$

(Sol. $i(t) = \frac{1}{50}[(1 - e^{-50t})^2 - u(t-1)(1 + 98e^{-50(t-1)} - 99e^{-100(t-1)})].$*)*

Esercizio 1.14.19 *Una massa di peso unitario è attaccata ad una molla leggera che viene tesa di 1 metro da una forza di 4 kg. La massa è inizialmente a riposo nella sua posizione di equilibrio. All'istante* $t = 0$ *una forza esterna* $f(t) = \cos(2t)$ *viene applicata alla massa, ma al tempo* $t = 2\pi$ *la forza viene spenta istantaneamente. Si trovi la funzione posizione* $x(t)$ *della massa. (Il problema si traduce nell'equazione* $x'' + 4x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$*).*
(Sol. $x(t) = \frac{1}{4} t \sin 2t$ *se* $t < 2\pi$ *e* $x(t) = \frac{\pi}{2} \sin 2t$ *se* $t \geq 2\pi$*.)*