

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: integrazione in campo complesso e teorema di Cauchy

Dott. Franco Obersnel

(i è l'unità immaginaria, $|z|$, \bar{z} , $\Re z$ e $\Im z$ indicano rispettivamente il modulo, il coniugato, la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso z , per cui $z = \Re z + i \Im z$, $\bar{z} = \Re z - i \Im z$, $|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$)

Esercizio 1 Sia C la circonferenza unitaria di centro 0 percorsa in verso antiorario. Si calcolino gli integrali:

a) $\int_C \bar{z} dz$, b) $\int_C \frac{1+z}{\bar{z}} dz$.

Esercizio 2 Sia $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3, \Im z \geq 0\}$ e si indichi con \sqrt{z} la determinazione principale della radice.

a) Si calcoli l'integrale $\int_C \sqrt{z} dz$.

b) Si provi che $|\int_C \frac{\sqrt{z}}{z^2+1} dz| \leq \frac{3\sqrt{3}\pi}{8}$.

c) Si calcoli l'integrale $\int_\gamma \left(\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} + \frac{4}{z-4} \right) dz$, con $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 3 \cos(t) + i \sin(t)$.

Soluzioni:

1. a) $2\pi i$. b) 0.

2. a) $-2\sqrt{3}(1+i)$. b) Si osservi che $|z| = 3$, $|\sqrt{z}| = \sqrt{3}$, $|z^2+1| \geq 8$ e la lunghezza di C è 3π . c) $6\pi i$.