Compiti assegnati ai gruppi.

Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $f : E \subseteq X_1 \to X_2$. Sia $x_1 \in X_1$ un punto di accumulazione per E, $\ell \in X_2$. Si scriva la definizione di limite

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = \ell$$

Si definiscano inoltre le nozioni di funzione continua e funzione uniformemente continua.

Teorema di caratterizzazione del limite di una funzione usando le successioni. Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $f : E \subseteq X_1 \to X_2$. Sia $\alpha \in X_1$ un punto di accumulazione per E, $\ell \in X_2$. Si ha allora che

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell$$

se e solo se, per ogni successione $(x_n)_n$ in E tale che $x_n \neq \alpha$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$$

Teorema sul limite delle componenti.

Siano (X_k, d_k), $k = 1, \dots, n$ spazi metrici. L'insieme prodotto cartesiano $P = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ è uno spazio metrico se definiamo la distanza

$$d(x, y) = d\big((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\big) = \sqrt{\sum_1^n d_k^2(x_k, y_k)}.$$

Sia (X, d) un ulteriore spazio metrico e $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : E \subseteq X \to X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per E, $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots \ell_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Si ha allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = \ell_k, \quad \text{per ogni } k = 1, 2, \dots, n$$

Sia (X, d) uno spazio metrico con d indotta da una norma $\|\cdot\|$. Si provi che la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \|x\|$ è continua.

Sia (X, d) uno spazio vettoriale metrico con d indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si provi che la funzione $g : X \times X \to \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = \langle x, y \rangle$ è continua.

Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $E \subseteq X_1$ un insieme chiuso, $f : E \subseteq X_1 \to X_2$ una funzione continua.

Si provi che per ogni $\alpha \in X_2$ l'insieme di livello $L_\alpha = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ è chiuso.

Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $L_1 = \{x \in [0, 1] : f(x) = 1\}$ è chiuso. È vero che f è continua in tutti i punti $x \in L_1$?

Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $L_\alpha = \{x \in [0, 1] : f(x) = \alpha\}$ è compatto. È vero che f è continua in almeno un punto $x_0 \in [0, 1]$?

Si provi il teorema di compattezza per le funzioni continue. Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $f : E \subseteq X_1 \to X_2$ una funzione continua. E compatto per successioni. Allora $f(E) \subseteq X_2$ è compatto per successioni. Si ottenga come corollario il teorema di Weierstrass.

Si trovi un esempio di uno spazio metrico completo (X_1, d_1), un insieme chiuso e limitato $E \subseteq X_1$ e una funzione continua $f : E \subseteq X_1 \to \mathbb{R}$ che non ha massimo.

Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Si provi che f è sottolineare, cioè esistono costanti $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$|f(x)| \leq a + bx \text{ per ogni } x \in [0, +\infty[.$$

Si esibisca un esempio di funzione sottolineare continua non uniformemente continua.

Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici. Si ricorda che una funzione $f : X_1 \to X_2$ si dice Lipschitziana se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L\, d_1(x, y)$$

per ogni $x, y \in X_1$. Si esibisca un esempio di funzione uniformemente continua non Lipschitziana.

Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici. Si ricorda che una funzione $f : X_1 \to X_2$ si dice Hölderiana di ordine $\alpha \in]0, 1]$ se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L\, d_1(x, y)^\alpha$$

per ogni $x, y \in X_1$.

Si verifichi che una funzione Hölderiana è uniformemente continua.

Si esibisca un esempio di funzione uniformemente continua non Hölderiana.

Avrebbe senso considerare la definizione di funzione Hölderiana di ordine $\alpha > 1$?

Si dimostri il seguente Teorema del passaggio al limite sotto il segno integrale.

Siano $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili e supponiamo che la successione $(f_n)_n$ converga uniformemente a una funzione f. Allora f è integrabile e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx.$$

Si verifichi che il teorema del passaggio al limite sotto il segno integrale non vale per l'integrale generalizzato sull'intervallo $[0, +\infty[$. Cioè non è vero in generale che, se $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sono funzioni integrabili (in senso generalizzato) su $[0, +\infty[$, e la la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente a una funzione f, allora necessariamente

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx.$$

Tuttavia, vale il seguente:

(Teorema di convergenza dominata) Siano $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ funzioni integrabili (in senso generalizzato) su $[0, +\infty[$ e supponiamo che la successione $(f_n)_n$ converga uniformemente a una funzione f. Supponiamo inoltre che $0 \le f_n(x) \le f(x)$ per ogni $x \in [0, +\infty[$ e che f sia integrabile (in senso generalizzato) su $[0, +\infty[$. Allora si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx.$$

Teorema sulle proprietà dell'insieme di convergenza di una serie di potenze. Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenze. Supponiamo che esista $x_1 \in \mathbb{R}$ tale che la serie converge per $x = x_1$. Allora in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ la serie converge. Inoltre, la serie converge uniformemente in ogni compatto strettamente contenuto nell'intervallo $]x_0 - |x_0 - x_1|, x_0 + |x_0 - x_1|[$.

Teorema di derivabilità di una serie di potenze. Si consideri una serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, convergente sull'intervallo $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$. Allora, la funzione $f :]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ è derivabile infinite volte su $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\to \mathbb{R}$ e si ha

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ e ogni $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $T-$periodica. Si provi che, per ogni $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_1+T} f(x)\, dx$$

Si provi l'ortonormalità in $L^2(]-\pi,\pi])$ della famiglia

$$\Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{sen}\,(nx), n \in \mathbb{N}^+ \Big\}.$$

Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ vale l'identità

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\mathrm{sen}\,\big((n+\frac{1}{2})\,t\big)}{2\,\mathrm{sen}\,(\frac{1}{2}t)}$$

Si provi il seguente teorema che riguarda la convergenza uniforme delle serie di Fourier.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua (su tutto $\mathbb{R}$) e $2\pi-$periodica. Supponiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| < +\infty, \text{ con } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{sen}\,(nx)\, dx,$$

Allora la serie di Fourier $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \mathrm{sen}\,(nx)$ converge uniformemente a f.

Esercizio svolto. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ è continua, limitata ma non uniformemente continua.

Per assurdo, sia uniformemente continua. Fissato ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $|x - y| < \delta$ si ha $|\operatorname{sen}(x^2) - \operatorname{sen}(y^2)| < \varepsilon$.

Prendiamo $x_k = \sqrt{2k\pi}$ e $y_k = \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$, con $k \in \mathbb{N}$.

Si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, $\operatorname{sen}(x_k^2) = 0$; $\quad \operatorname{sen}(y_k^2) = 1$; $\quad |\operatorname{sen}(y_k^2) - \operatorname{sen}(x_k^2)| = 1$.
Inoltre

$$|x_k - y_k| = \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2k\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2k\pi}}$$

e quindi $\lim_{k\to+\infty} |x_k - y_k| = 0$. Pertanto, prendendo k abbastanza grande, trovo una coppia di punti x_k, y_k tali che $|x_k - y_k| < \delta$ ma $|\operatorname{sen}(x_k^2) - \operatorname{sen}(y_k^2)| > \varepsilon$.

Esercizio svolto. Sia $f : X \to Y$ una funzione il cui grafico è compatto. Allora f è continua.

Sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X. Per assurdo sia f non continua in x_0. Allora esiste $\varepsilon > 0$ e una successione $(x_n)_n$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ ma

$$d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. La successione $(x_n, f(x_n))_n$ ha valori nel grafico Γ_f di f, che è compatto. Quindi esiste una sottosuccessione $(x_{n_k}, f(x_{n_k}))_k$ convergente ad un punto $(a, f(a)) \in \Gamma_f$. Poiché $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x_0$, si ha necessariamente $a = x_0$ e quindi $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}))_k = f(x_0)$, contraddizione.

Teorema sulla completezza degli spazi di funzioni $B(X,Y)$ e C_B.
Siano (X, d) uno spazio metrico e $(Y; \|\cdot\|)$ uno spazio normato completo. Allora gli spazi $B(X,Y) = \{f : X \to Y : \text{ limitata }\}$ e $C_B = \{f \in B(X,Y) : f \text{ continua }\}$ sono completi, se dotati della norma $\|\cdot\|_\infty$.

Dimostrazione. Sia $(f_n)_n$ una successione di Cauchy in $B(X,Y)$. Per ogni $x \in X$, $n, m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

da cui si deduce immediatamente che la successione $(f_n(x))_n$ è di Cauchy in Y. Per la completezza di Y esiste il limite $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Perciò la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente a f. Proviamo che la convergenza è anche uniforme. Fissato $\varepsilon > 0$, si prenda $\hat{n}$ tale che, per ogni $n, m \geq \hat{n}$, si ha $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Allora, per ogni $x \in X$ si ha $\|f_n(x) - f_m(x)\|_Y < \varepsilon$. Quindi, per la continuità della norma $\|\cdot\|_Y$ rispetto alla topologia in Y, e per la proprietà del confronto dei limiti, si ha

$$\|f_n(x) - f(x)\|_Y = \lim_{m\to+\infty} \|f_n(x) - f_m(x)\|_Y \leq \varepsilon.$$

Consideriamo ora l'estremo superiore, si ha $\sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|_Y \leq \varepsilon$, cioè $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Teorema sul prolungamento continuo di una funzione uniformemente continua.

Siano (X,d_1), (Y,d_2) spazi metrici, Y completo, $f : E \subset X \to Y$ una funzione uniformemente continua. Allora esiste un'unica funzione continua $\bar{f} : \overline{E} \to Y$ tale che $\bar{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$. Inoltre f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \overline{E} \setminus E$. Allora esiste una successione $(x_n)_n$ di punti di E che converge a x_0. Essendo convergente, la successione è di Cauchy, quindi, essendo f uniformemente continua, anche $(f(x_n))_n$ è di Cauchy. Per ipotesi Y è completo, quindi esiste il limite $y_0 = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$. Sia ora $(u_n)_n$ una seconda successione che converge allo stesso punto x_0. Utilizzando l'uniforme continuità della f, si ottiene

$$d_2(f(u_n), y_0) \le d_2(f(u_n), f(x_n)) + d_2(f(x_n), y_0) \to 0,$$

quando $n \to +\infty$, quindi $y_0 = \lim_{n\to+\infty} f(u_n)$. Abbiamo verificato che il limite y_0 non dipende dalla particolare successione convergente a x_0, possiamo allora definire $\bar{f}(x_0) = y_0$.

Proviamo che $\bar{f}$ è uniformemente continua su $\overline{E}$. Fissato $\varepsilon > 0$, si vuole trovare $\delta > 0$ tale che, per ogni $x_0, u_0 \in \overline{E}$ che soddisfano $d_1(x_0, u_0) < \delta$ si ha $d_2(\bar{f}(x_0), \bar{f}(u_0)) < \varepsilon$. Poiché f è uniformemente continua su E possiamo scegliere $\delta > 0$ tale che, per ogni $y, z \in E$, se $d_1(y, z) < 3\,\delta$ si ha $d_2(f(y), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Siano x_0, $u_0 \in \overline{E}$ tali che $d_1(x_0, u_0) < \delta$. Prendiamo una successione $(x_n)_n$ convergenete a x_0 e una successione $(u_n)_n$ convergente a u_0 (e quindi la successione $(f(x)_n)_n$ converge a $\bar{f}(x_0)$ e la successione $(f(u_n))_n$ converge a $\bar{f}(u_0)$). Prendiamo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che, per ogni $n \ge n_\varepsilon$, si ha

$$d_1(x_n, x_0) < \delta; \quad d_1(u_n, u_0) < \delta; \quad d_2(f(x_n), \bar{f}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}; \quad d_2(f(u_n), \bar{f}(u_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si ha allora, per ogni $n \ge n_\varepsilon$,

$$d_1(x_n, u_n) \le d_1(x_n, x_0) + d_1(x_0, u_0) + d_1(u_0, u_n) < 3\,\delta$$

e quindi

$$d_2(\bar{f}(x_0), \bar{f}(u_0)) \le d_2(\bar{f}(x_0), f(x_n)) + d_2(f(x_n), f(u_n)) + d_2(f(u_n), \bar{f}(u_0)) < \varepsilon.$$

Teorema di derivabilità di una serie di potenze. Si consideri una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ e sia ρ il suo raggio di convergenza. Allora, la funzione $f :]x_0-\rho, x_0+\rho[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ è derivabile infinite volte su $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ e si ha

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ e ogni $x \in]x_0-\rho, x_0+\rho[$.

Dimostrazione. Consideriamo la successione $(S_n(x))_n$ delle ridotte della serie e la successione delle derivate:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k; \qquad S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k(x-x_0)^{k-1}$$

Osserviamo che la serie delle derivate è anch'essa una serie di potenze. Indichiamo con ρ' il raggio di convergenza di questa serie. Dimostreremo che $\rho' = \rho$.

Sia $|x-x_0| < \rho'$. Allora $|a_n(x-x_0)^n| \le |x-x_0| \cdot |na_n(x-x_0))^{n-1}|$. Per il criterio del confronto delle serie, poiché la serie $\sum_{n=+\infty}^{n} |na_n(x-x_0)^{n-1}|$ converge (per l'ipotesi $|x-x_0| < \rho'$), anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ converge, e quindi $|x-x_0| \le \rho$. Questo prova che $\rho' \le \rho$.

Sia $|x-x_0| < \rho$ e prendiamo $r \in \mathbb{R}$ tale che $|x-x_0| < r < \rho'$. La serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^{n-1}$ è convergente, quindi la successione $(a_n r^{n-1})_n$ è limitata; sia $|a_n r^{n-1}| \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Si ha allora

$$|a_n n(x-x_0)^{n-1}| \leq |a_n r^{n-1}| \cdot n \left|\frac{x-x_0}{r}\right|^{n-1} \leq M \cdot n \left|\frac{x-x_0}{r}\right|^{n-1}.$$

La serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left|\frac{x-x_0}{r}\right|^{n-1}$ è convergente, perché $\left|\frac{x-x_0}{r}\right| < 1$, quindi, per il criterio del confronto, anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n n(x-x_0)^{n-1}|$ è convergente. Questo significa che $|x-x_0| \leq \rho'$ e quindi si è provato che $\rho \leq \rho'$.

Possiamo infine applicare il teorema sulla derivata del limite di una successione di funzioni. Sia $K = [x_0-r, x_0+r] \subset]x_0-\rho, x_0+\rho[$. La successione $(S_n(x))_n$ converge su K alla funzione $f(x)$; la successione $(S'_n(x))_n$ converge uniformemente su K alla funzione $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1}$. Quindi, si ha che f è derivabile su K e $f'(x) = g(x)$. Poiché $0 < r < \rho$ è generico, concludiamo che lo stesso vale per ogni $x \in]x_0-\rho, x_0+\rho[$.

Infine, ragionando per induzione su k, si ottiene il risultato generale per la derivata di ordine k.

Esercizio svolto. Siano $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ funzioni integrabili (in senso generalizzato) su $[0,+\infty[$ e supponiamo che la successione $(f_n)_n$ converga uniformemente a una funzione f. Supponiamo inoltre che $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [0,+\infty[$ e che f sia integrabile (in senso generalizzato) su $[0,+\infty[$. Allora si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poché la funzione f è integrabile esiste $b > 0$ tale che $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(x)\,dx < \varepsilon$. Sull'intervallo limitato $[0,b]$ si può usare il teorema di integrabilità del limite uniforme. Quindi si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^b f_n(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx.$$

Scegliamo dunque n_0 tale che $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx - \int_0^b f_n(x)\,dx < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Avremo allora

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx - \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \leq \int_0^b \big(f(x) - f_n(x)\big)\,dx + \int_b^{+\infty} \big(f(x) - f_n(x)\big)\,dx \leq \varepsilon + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx < 2\varepsilon.$$