Università di Trieste. Facoltà di Ingegneria.

Funzioni $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

Dr. Franco Obersnel

Limite di una funzione in una variabile

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di accumulazione di E. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se e solo se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E$

$$(0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) .$$

Limite di una funzione $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

Sia $\overline{f} : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Sia $\overline{x}_0$ un punto di accumulazione di E, $\bar{l} \in \mathbb{R}^M$. Allora

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \overline{f}(\overline{x}) = \bar{l}$$

se e solo se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \overline{x} \in E$

$$\big(0 < ||\overline{x} - \overline{x}_0|| < \delta\ \Rightarrow ||\overline{f}(\overline{x}) - \bar{l}|| < \varepsilon\big) .$$

Continuità di una funzione $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

Sia $\overline{f} : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Sia $\overline{x}_0 \in E$.
Allora $\overline{f}$ è continua in $\overline{x}_0$ se e solo se
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \overline{x} \in E$

$$\big(||\overline{x} - \overline{x}_0|| < \delta \Rightarrow ||\overline{f}(\overline{x}) - \overline{f}(\overline{x}_0)|| < \varepsilon\big) .$$

Si ricorda che se $\overline{x}_0$ è un punto di accumulazione di E allora $\overline{f}$ è continua in $\overline{x}_0$ se e solo se

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x}_0).$$

Teoremi sui limiti e sulle funzioni continue

1. **Teorema di unicità del limite.** Se esiste $\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \overline{f}(\overline{x})$, questo è unico.

2. **Teorema sul limite della restrizione.** Sia $\overline{f} : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, sia $F \subseteq E$ e sia $\overline{x}_0$ un punto di accumulazione di F (e quindi anche di E).

   Se esiste il limite $\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \bar{l}$, allora esiste anche il limite della funzione $\overline{f}$ ristretta al sottoinsieme F e si ha

   $$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \overline{f}|_F(\overline{x}) = \bar{l}.$$

3. **Teorema della limitatezza locale.** Se esiste (finito) il limite $\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \overline{f}(\overline{x}) = \bar{l}$ allora la funzione $\overline{f}$ è localmente limitata in $\overline{x}_0$. (Cioè esistono un intorno U di $\overline{x}_0$, ed una costante $M > 0$ tali che $||\overline{f}(\overline{x})|| \leq M\ \forall \overline{x} \in U$).

4. **Teorema sul limite della combinazione lineare.** Siano $\overline{f}, \overline{g} : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, α e β numeri reali, e sia $\overline{x}_0$ un punto di accumulazione di E. Allora, se esistono i limiti
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{l} \quad \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \overline{g}(\overline{x}) = \overline{s},$$
esiste anche il limite della funzione combinazione lineare $\alpha\overline{f} + \beta\overline{g}$ e si ha
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \left(\alpha\overline{f}(\overline{x}) + \beta\overline{g}(\overline{x})\right) = \alpha\overline{l} + \beta\overline{s}.$$

5. **Teorema sul limite della funzione composta.** Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $F \subseteq \mathbb{R}^M$, $\overline{f} : E \to \mathbb{R}^M$, $\overline{f}(E) \subseteq F$, $\overline{g} : F \to \mathbb{R}^K$; sia $\overline{x}_0$ un punto di accumulazione di E, $\overline{y}_0$ un punto di accumulazione di F; sia U un intorno di $\overline{x}_0$ tale che $\overline{f}(\overline{x}) \neq \overline{y}_0$ per ogni $\overline{x} \in U \setminus \{\overline{x}_0\}$. Sia
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{y}_0 \quad \lim_{\overline{y}\to\overline{y}_0} \overline{g}(\overline{y}) = \overline{l};$$
allora esiste il limite per $\overline{x}$ che tende a $\overline{x}_0$ della funzione composta $\overline{g} \circ \overline{f}$ e si ha
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \overline{g}\left(\overline{f}(\overline{x})\right) = \overline{l}.$$

6. **Teorema di compattezza.** Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un insieme compatto (cioè chiuso e limitato). Sia $\overline{f} : K \to \mathbb{R}^M$ una funzione continua. Allora l'insieme immagine $\overline{f}(K) \subset \mathbb{R}^M$ è compatto.

7. **Teorema di connessione.** Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme connesso (per archi), e sia $\overline{f} : E \to \mathbb{R}^M$ una funzione continua. Allora l'insieme immagine $\overline{f}(E) \subseteq \mathbb{R}^M$ è connesso (per archi).

8. **Limite delle funzioni componenti.** Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e $\overline{x}_0$ un punto di accumulazione di E. Sia $\overline{f} : E \to \mathbb{R}^M$, $\overline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_M)^T$, $\overline{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_M)^T$. Allora
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{l} \quad \text{se e solo se}$$
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f_i(\overline{x}) = l_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, M.$$
(Analogamente, $\overline{f}$ è continua in $\overline{x}_0$ se e solo se tutte le funzioni f_i sono continue in $\overline{x}_0$).

   Teoremi validi per i campi scalari:

9. **Teorema della permanenza del segno.** Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e $\overline{x}_0$ un punto di accumulazione di E. Sia $f : E \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $l > 0$ ($l < 0$). Sia
$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = l.$$
Allora esiste un intorno U di $\overline{x}_0$ tale che $f(\overline{x}) > 0$ ($f(\overline{x}) < 0$) per ogni $\overline{x} \in U$.

10. **Teorema di esistenza degli zeri.** Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme connesso (per archi). Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano $\overline{x}$ e $\overline{y}$ due punti di E tali che $f(\overline{x}) \cdot f(\overline{y}) < 0$ (cioè i due valori hanno segni opposti). Allora esiste un punto $\overline{z} \in E$ tale che $f(\overline{z}) = 0$.

11. **Limite della funzione prodotto e della funzione quoziente.** Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e $\overline{x}_0$ un punto di accumulazione di E. Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$, $l, s \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = l \quad \lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} g(\overline{x}) = s.$$
Allora esiste il limite per $\overline{x}$ che tende a $\overline{x}_0$ della funzione prodotto $f \cdot g$ e si ha
$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) \cdot g(\overline{x}) = l \cdot s.$$
Inoltre, se $s \neq 0$, esiste un intorno U di $\overline{x}_0$ tale che $\forall \overline{x} \in U \ g(\overline{x}) \neq 0$, la funzione quoziente f/g è definita su U, ammette limite per $\overline{x}$ che tende a $\overline{x}_0$ e si ha
$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \frac{l}{s}.$$

12. **Teorema di Weierstrass.** Sia $K \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme compatto (chiuso e limitato). Sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono minimo e massimo per la funzione f su K. Cioè eistono $\overline{x}_m$ e $\overline{x}_M$ appartenenti a K tali che $f(\overline{x}_m) = m$ e $f(\overline{x}_M) = M$ e per ogni $\overline{x} \in K$ si ha $m \leq f(\overline{x}) \leq M$.