Capitolo 3

Un'introduzione alle serie di Fourier

3.1 Considerazioni preliminari

Dato un sistema numerabile di funzioni $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$ definite su un intervallo $[a, b]$ di $\mathbf{R}$ e una funzione $f(x)\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ $(\mathbf{C})$, ci poniamo il problema di approssimare $f(x)$ con una serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$, essendo i coefficienti c_n scelti opportunamente.

Cioè, considerata la somma parziale $s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x)$, ci poniamo il problema di indagare che cosa accade facendo tendere N a $+\infty$, nel senso di vari tipi di convergenza: puntuale, uniforme o in *media quadratica*, come viene meglio precisato di seguito.
Precisamente, diremo che la somma $s_N(x)$ *converge puntualmente* a $f(x)$ se $\forall x \in [a, b]$, si ha che $\lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$.
Se il limite è uniforme rispetto a x, cioè se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$, tale che $\forall N > N_\varepsilon$ e $\forall x \in [a, b]$ si ha

$$|s_N(x) - f(x)| < \varepsilon\,,$$

diremo che *la convergenza è uniforme*.
Data una funzione $w(x)$ definita su $[a, b]$, per la quale, in generale, è $w(x) \geq 0$ e che chiameremo *funzione peso*, consideriamo l'integrale

$$\int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2 w(x)\, dx \quad .$$

Diremo che $s_N(x)$ converge in *media quadratica* a $f(x)$ se

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b |f(x)-s_N(x)|^2 w(x)d\,x = 0\,.$$

Quest"integrale è detto *deviazione quadratica media* o *scarto quadratico medio* di $s_N(x)$ da $f(x)$.
Due funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$ sono *ortogonali* su $[a,b]$ rispetto al peso $w(x)$ se

$$\int_a^b \phi(x)\cdot\psi(x)\cdot w(x)\,d\,x = 0 \quad .$$

Per esempio, le funzioni 1 e x sono ortogonali rispetto al peso $w(x)=1$ su $[-1,1]$.
Considereremo data, d'ora in poi, una successione di funzioni $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$ definite su $[a,b]$ e a due a due ortogonali rispetto al peso $w(x)$. Possiamo allora porci il problema di determinare i coefficienti c_n in modo tale che per la funzione integrabile $f(x)$ lo scarto quadratico medio sia minimo. Cioè che sia minimo:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \big(f(x)-\sum_{n=1}^N c_n\phi_n(x)\big)^2 w(x)\,d\,x &= \int_a^b f^2(x)\,w(x)\,d\,x \\
-2\sum_{n=1}^N c_n\int_a^b f(x)\phi(x)\,w(x)\,d\,x + \sum_{n=1}^N c_n^2\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)\,d\,x &= \\
= \sum_{n=1}^N \int_a^b \phi_n^2(x)w(x)d\,x\big[c_n - \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)w(x)\,d\,x}{\int_a^b \phi_n^2(xw(x)\,d\,x}\big]^2 &+ \\
+\int_a^b f^2(x)w(x)\,d\,x - \sum_{n=1}^N \frac{[\int_a^b f(x)\phi_n(x)w(x)\,d\,x]^2}{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)\,d\,x}
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che lo scarto è minimo se

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)w(x)\,d\,x}{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)\,d\,x} \tag{3.1}$$

e in questo caso vale

$$\int_a^b f^2(x)w(x)\,d\,x - \sum_{n=1}^N \frac{[\int_a^b f(x)\phi_n(x)w(x)\,d\,x]^2}{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)\,d\,x}$$

I coefficienti così determinati si dicono i *coefficienti di Fourier* di $f(x)$ rispetto alle funzioni ortogonali $\phi_n(x)$. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \tag{3.2}$$

si dice la *serie di Fourier* di $f(x)$.
Se al posto di c_n si pone il suo valore sopra calcolato, si trova

$$0 \leq \int_a^b \big[f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x)\big]^2 w(x) d\,x =$$

$$\int_a^b f^2(x) w(x) d\,x - \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) d\,x\,. \tag{3.3}$$

Dunque, per ogni $N \in \mathbf{N}$ vale

$$\sum_{n=1}^{N} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) d\,x \leq \int_a^b f^2(x) w(x) d\,x\,.$$

Se $f(x)$ è a quadrato sommabile su $[a, b]$, prendendo il limite per $N \to \infty$, si vede che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) d\,x$$

converge e inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) d\,x \leq \int_a^b f^2(x) w(x) d\,x\,. \tag{3.4}$$

Questa disuguaglianza è detta *disuguaglianza di Bessel*.
Un'ulteriore conseguenza è che

$$\lim_{n\to\infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) d\,x =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\int_a^b f(x)\phi_n(x) w(x) d\,x\right)^2}{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) d\,x} = 0\,. \tag{3.5}$$

Se, per il sistema di funzioni considerato, la serie ha somma $\int_a^b f^2(x) w(x) d\,x$, cioè se

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(x) w(x) d\,x = \int_a^b f^2(x) w(x) d\,x\,, \tag{3.6}$$

allora si dice che vale *l'equazione di Parseval*.
In questo caso il sistema $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$ si dice *completo* su $[a, b]$ rispetto al peso $w(x)$.

3.2 Lemma di Riemann-Lebesgue

Abbiamo appena constatato che se $\int_a^b f^2(x)w(x)d\,x$ è finito e se $(\phi_n(x))_{n=1}^{\infty}$ è un sistema ortogonale, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)w(x)d\,x}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)d\,x}} = 0\,.$$

In realtà si può ottener un risultato più forte, che qui riportiamo senza dimostrazione

Lemma 3.2.1 [di Riemann–Lebesgue] *Se la famiglia di funzioni* $\dfrac{\phi_n(x)}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)d\,x}}$ *è uniformemente limitata, cioè se esiste una costante* $K > 0$ *tale che*

$$\forall x \in [a, b]\,, \forall n \in \mathbf{N}\,,\ \left|\frac{\phi_n(x)}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)d\,x}}\right| \leq K\,,$$

e se $f(x)$ *è assolutamente integrabile, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)w(x)d\,x}{\sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)w(x)d\,x}} = 0\,.$$

3.3 Serie di Fourier trigonometriche

Le funzioni $1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \cos nx, \ldots$ sono ortogonali su $-\pi \leq x \leq \pi$, con peso $w = 1$. Lo si vede facilmente calcolando (per parti) gli integrali

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, d\,x = \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, d\,x$$
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx\, d\,x = -\frac{n}{m} \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, d\,x$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, d\,x = \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, d\,x$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \cos nx \, d\,x = \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{2n} \Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0 \quad .$$

Dunque si trova

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, d\,x = 0 \quad \text{se}\, n \neq m\,; \tag{3.7}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx \, d\,x = 0 \quad \text{se}\, n \neq m\,; \tag{3.8}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, d\,x = 0 \, \forall\, n, m \in \mathbf{N} \quad . \tag{3.9}$$

Vale poi $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} 1 d\,x = 2\pi, \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx \, d\,x = \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, d\,x = \pi.$
Diremo serie di Fourier trigonometrica per una funzione $f(x)$ definita su $[-\pi, \pi]$ e scriveremo

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \ldots \tag{3.10}$$

una serie di funzioni trigonometriche nella quale

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, d\,x \quad , \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \cos nx \, d\,x \quad , \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, d\,x \quad , \end{aligned} \tag{3.11}$$

in accordo con il valore di c_n ottenuto in generale:

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\, \phi_n(x)\, w(x)\, d\,x}{\int_a^b \phi_n^2(x)\, w(x)\, d\,x} \quad .$$

Qui si è preferito scrivere $\dfrac{a_0}{2}$ al posto di c_0, per consentire una maggiore simmetria nelle formule.
Ora

$$s_N(x) \quad = \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \, \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}(\cos nx\cdot\cos nt+\operatorname{sen} nx\cdot\operatorname{sen} nt)\}\,dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos n(x-t)\}\,dt \quad .
\end{aligned}
$$

Si osservi che

$$
\begin{aligned}
&\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos ny\}\cdot\operatorname{sen}(\frac{1}{2}y)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\frac{1}{2}y)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}[\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})y-\operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})y] = \\
&= \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}y)+\operatorname{sen}(\frac{3}{2}y)-\operatorname{sen}(\frac{1}{2}y)+\ldots+\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})y-\operatorname{sen}(N-\frac{1}{2})y\} = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})y \quad .
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos ny=\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})y}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}y)} \tag{3.12}
$$

e quindi

$$
s_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})(t-x)}{\operatorname{sen}(\frac{t-x}{2})}\,dt \quad .
$$

Se poniamo $t=x+\tau$, allora $\tau\in[-\pi-x,\pi-x]$ e si trova

$$
s_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau)\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})}\,d\tau \quad .
$$

Prolungando per periodicità $f(x)$ fuori da $[-\pi,\pi]$, avendo definito $f(x+2\pi n)=f(x)$, per $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, allora anche $s_N(x)$ è periodica di periodo 2π e l'integrale esteso a $[-\pi-x,\pi-x]$ è uguale all'integrale esteso a $[-\pi,\pi]$. Cioè

$$
s_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})}\,d\tau \quad . \tag{3.13}
$$

3.4 Convergenza puntuale

Integrando l'equazione (3.12) su $[-\pi,\pi]$, si trova

$$
\pi=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})}\,d\tau \quad .
$$

Tenendo conto di quest'uguaglianza e della (3.13) si ottiene

$$\begin{aligned} s_N(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})}\,d\tau - \\ &- f(x)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})}\,d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big[f(x+\tau)-f(x)\big]\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\tau}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})}\,d\tau\,. \quad (3.14)\end{aligned}$$

Le funzioni $\operatorname{sen}(N+\dfrac{1}{2})\tau$, $N = 0, 1, 2, \ldots$ sono ortogonali e soddisfano le condizioni del Lemma di Riemann – Lebesgue. Allora, se

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+\tau)-f(x)}{\operatorname{sen}(\frac{\tau}{2})}\right|d\tau < +\infty \quad ,$$

ossia se, equivalentemente,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau}\right|d\tau < +\infty \quad , \tag{3.15}$$

si trova che, per ogni $x \in \mathbf{R}$, vale

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x) \quad . \tag{3.16}$$

Dunque c'è convergenza puntuale della serie di Fourier a $f(x)$ se la funzione periodica di periodo 2π soddisfa la condizione (3.15) detta *Criterio di Dini*. Osserviamo che, affinché valga la (3.15), non è sufficiente che $f(x)$ sia continua nel punto x. Infatti una serie di Fourier può divergere in punti nei quali $f(x)$ è continua se la condizione di Dini è violata. Se $f(x)$ è assolutamente integrabile e derivabile in un punto x, allora la serie di Fourier converge a $f(x)$. Più in generale, se in un intorno di x la funzione è hölderiana, cioè se esistono $M > 0$ e $\alpha > 0$ (e $\alpha \leq 1$) tali che $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha$, allora la serie di Fourier è convergente.
Si può dimostrare che se f non è continua in x, ma ha limiti finiti da destra e da sinistra, che indicheremo rispettivamente con $f(x+)$ e $f(x-)$, e vale la condizione di Dini generalizzata

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+\tau)-f(x+)+f(x-\tau)-f(x-))}{\tau}\right|d\tau < +\infty \quad , \tag{3.17}$$

allora

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x) = \frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)] \quad . \tag{3.18}$$

3.5 Convergenza uniforme

Da quanto abbiamo appena detto segue che, affinché $s_N(x)$ converga uniformemente a $f(x)$ la funzione *deve* essere continua e inoltre *deve valere* $f(-\pi) = f(\pi)$. Queste condizioni non sono tuttavia sufficienti.
Supponiamo che $f(x)$ sia continua, periodica di periodo 2π e che $f'(x)$ sia continua tranne che in un numero finito di punti dove può non essere definita. Supponiamo inoltre che sia finito $\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 \, d\,x$ e che valga la formula $f(x) - f(-\pi) = \int_{-\pi}^{x} f'(t) \, d\,t$. Sia

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \mathrm{sen}\, x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \mathrm{sen}\, nx + \ldots ;$$

calcoliamo i coefficienti di F. di $f'(x)$.

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, d\,x = \frac{1}{\pi} \{ f(x) \cos nx \big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{sen}\, nx \, d\,x \} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cos n\pi \{ f(\pi) - f(-\pi) \} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{sen}\, nx \, d\,x = nb_n \,. \end{aligned}$$

Analogamente $\beta_n = -na_n$. Dunque

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \mathrm{sen}\, nx) \,.$$

La disuguaglianza di Bessel dà

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 \, d\,x \quad . \tag{3.19}$$

Ora $s_N(x) - s_M(x) = \sum_{n=N+1}^{M} (a_n \cos nx + b_n \mathrm{sen}\, nx)$ e $|s_N(x) - s_M(x)| \leq \Big(\sum_{n=N+1}^{M} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \Big)^{1/2} \cdot \big(\sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^2} \big)^{1/2}$, per la disuguaglianza di Cauchy - Buniakovski-Schwarz. Dunque

$$|s_N(x) - s_M(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x) \, d\,x} \cdot \sqrt{\sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^2}} \,. \tag{3.20}$$

Poiché la serie $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, possiamo concludere che, per il criterio generale di convergenza di Cauchy, la successione $s_N(x)$ converge uniformemente alla sua somma. Si trova poi che la somma è proprio $f(x)$. Infatti si ha

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \Big| \int_{x_1}^{x_2} f'(t)\, dt \Big| \le \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} |f'^2(t)|\, dt} \cdot \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} 1\, dt}$$

$$\le |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\int_a^b |f'^2(t)|\, dt} \le K \cdot |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Dunque $f(x)$ è hölderiana con esponente $\alpha = \frac{1}{2}$ e quindi la serie di Fourier, per ogni x, converge a $f(x)$.
In particolare, c'è convergenza uniforme a $f(x)$ se $f'(x)$ è hölderiana o se nel numero finito di punti nei quali non è continua ha limiti finiti da destra e da sinistra.

Si dimostra poi che la serie di Fourier di una funzione a quadrato sommabile converge in media quadratica. Cioè che

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \big| f(x) - s_N(x) \big|^2\, dx = 0 \quad ,$$

se $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx < \infty$.
Ciò significa che il sistema ortogonale $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots\}$ è *completo.*

3.6 Cambiamento di scala

Finora abbiamo supposto $f(x)$ definita su $[-\pi, \pi]$. Supponiamo ora che sia definita su un generico intervallo $[a, b]$. La sostituzione di variabile

$$\bar{x} = \frac{2\pi(x - \frac{a+b}{2})}{b-a} \quad ,$$

porta $[a, b]$ in $[-\pi, \pi]$. Si trova poi

$$x = \frac{b-a}{2\pi}\bar{x} + \frac{1}{2}(a+b) \quad .$$

Data $f(x)$ su $[a, b]$, $F(\bar{x}) = f(\frac{b-a}{2\pi}\bar{x} + \frac{1}{2}(a+b))$ è definita su $[-\pi, \pi]$. La serie di Fourier di $F(\bar{x})$ sia

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \ldots ,$$

con

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\bar{x}) \cos n\bar{x}\, d\,\bar{x} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\bar{x}) \operatorname{sen} n\bar{x}\, d\,\bar{x}\,.
\end{aligned}
$$

Allora

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-\frac{a+b}{2})\,d\,x && (3.21)\\
b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{b-a}(x-\frac{a+b}{2})\,d\,x\,. && (3.22)
\end{aligned}
$$

In particolare, se $f(x)$ è definita tra 0 e l e la prolunghiamo per parità (disparità) tra $-l$ e l,

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}(x)\,d\,x && (3.23)\\
(b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x)\,d\,x)\,. && (3.24)
\end{aligned}
$$

3.7 Qualche esempio

Sia $f(x) = x$ su $[-\pi, \pi]$. Allora $a_n = 0$ per ogni n e

$$
b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, d\,x = -2\frac{(-1)^n}{n}\,.
$$

Perciò

$$
x \sim -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{2}{4}\operatorname{sen} 4x + \ldots
$$

In questo caso l'uguaglianza di Parseval fornisce

$$
4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, d\,x = \frac{2}{3}\pi^2
$$

Dunque $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Se $f(x) = x^2$ su $[-\pi, \pi]$, $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$ e $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$, per $n \geq 1$, mentre $b_n = 0$ per ogni n. Allora

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x + \ldots$$

In $x = 0$ la serie converge e si trova $0 = \dfrac{\pi^2}{3} - 4 \cdot (1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots)$. Cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad .$$

Bibliografia

1. L. Amerio, *Elementi di analisi superiore*, Tamburini, Milano (1960).
2. R. Courant e D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Vol. I, Interscience, New York (1962).
3. V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, Vol. II, Éditions MIR, Moscou (1970)
4. A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*, Academic Press Publ., New York (1949).
5. H. F. Weinberger, *A first course in partial differential equations*, John Wiley & Sons, New York (1965).