FORMULARIO METODI MATEMATICI 2025

Analisi Complessa

Determinazione principale del logaritmo: $\mathrm{Log}(\omega) = \log(|\omega|) + i\mathrm{Arg}(\omega)$

$$\sin(iz) = i\sinh(z) \qquad \cos(iz) = \cosh(z)$$
$$\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$
$$\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

Residuo in un polo di ordine n: $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$

Serie di Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx,\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx,\ c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-in\omega x}\,dx$$

Identità di Parseval

$$T\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \frac{T}{2}\Big(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\Big) = \|f\|_2^2.$$

Traformate di Fourier

Trasformata della derivata:

$$\mathcal{F}\{\frac{d^k}{dx^k}f(x)\}(\omega) = (i\omega)^k\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)$$

Derivata della trasformata:

$$\frac{d^k}{d\omega^k}\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) = (-i)^k\mathcal{F}\{x^k f(x)\}(\omega)$$

Traslazione nel tempo:

$$\text{Se } f(x)\longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \Longrightarrow f(x-x_0)\longleftrightarrow e^{-i\omega x_0}\hat{f}(\omega)$$

Traslazione nella frequenza:

$$\text{Se } f(x)\longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \Longrightarrow \hat{f}(\omega-\omega_0)\longleftrightarrow e^{i\omega_0 x}f(x)$$

Scalaggio nel tempo:

$$\text{Se } f(x)\longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \Longrightarrow f(ax)\longleftrightarrow \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$$

Coniugio:

$$\text{Se } f(x)\longleftrightarrow \hat{f}(\omega) \Longrightarrow \overline{f(x)}\longleftrightarrow \overline{\hat{f}(-\omega)}$$

Plancherel:

$$\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = 2\pi\|f\|_{L^2}^2$$

Trasformate notevoli:

$$\chi_{[a,b]}(x)\longleftrightarrow \frac{e^{-i\omega a}-e^{-i\omega b}}{i\omega}$$

$$e^{-a|x|}\longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\frac{1}{a^2+x^2}\longleftrightarrow \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

$$e^{-ax^2}\longleftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$p_{2a}(x)\longleftrightarrow 2a\ \mathrm{sinc}(\frac{a\omega}{\pi})$$

$$\Lambda_a(x)\longleftrightarrow a^2\ \mathrm{sinc}^2(\frac{a\omega}{2\pi})$$

Trasformate di Laplace

Trasformata della derivata:

$$\mathcal{L}\{\frac{d^k}{dx^k}f(x)\}(s) =$$

$$= s^kF(s) - s^{k-1}f(0^+) - s^{k-2}f'(0^+) - ... - f^{(k-1)}(0^+)$$

Derivata della trasformata:

$$\frac{d^k}{ds^k}\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = (-1)^k\mathcal{L}\{x^kf(x)\}(s)$$

Traslazione nel tempo:

$$\text{Se } f(x) \longleftrightarrow F(s)$$

$$\Longrightarrow f(x-x_0)u(x-x_0) \longleftrightarrow e^{-sx_0}F(s)$$

Traslazione nei complessi:

$$\text{Se } f(x) \longleftrightarrow F(s) \Longrightarrow F(s-s_0) \longleftrightarrow e^{s_0x}f(x)$$

Scalaggio nel tempo:

$$\text{Se } f(x) \longleftrightarrow F(s) \Longrightarrow f(ax) \longleftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

Trasformate notevoli:

$$\sin(ax) \longleftrightarrow \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\sinh(ax) \longleftrightarrow \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\cos(ax) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\cosh(ax) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$x^\alpha u(x) \longleftrightarrow \frac{\alpha!}{s^{\alpha+1}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

Trasformata di un segnale periodico:

$$\text{Se } f(x) \longleftrightarrow F(s) \text{ segnale periodico, } f^*(x) \longleftrightarrow F^*(s) \text{ t.c. } f^*(x) = f(x)(u(x) - u(x-T))$$

$$\Longrightarrow F^*(s) = F(s)(1-e^{-sT})$$

Prodotto di convoluzione:

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$