Università di Trieste
– Corso di studio: ME14 - TECNICHE DI RADIOLOGIA MEDICA, PER IMMAGINI E RADIOTERAPIA.

Alcuni esercizi sulle funzioni
Professor Franco Obersnel

Esercizio 1 Si stabilisca se le seguenti relazioni $f : A \to B$ sono funzioni; in caso affermativo si stabilisca se sono iniettive, suriettive, biiettive:

(a) $A = \{\text{studenti del corso}\}$, $B = \{\text{nomi di persona}\}$, $f(s)$ è il nome dello studente s.

(b) $A = \{\text{studenti del corso}\}$, $B = \mathbb{R}$, $f(s)$ è la pressione massima del sangue dello studente s misurata in un determinato momento da un determinato apparecchio.

(c) $A = \{\text{sedie presenti in aula e occupate}\}$, $B = \{\text{studenti del corso presenti in aula}\}$, $f(s)$ è lo studente che in un dato momento occupa la sedia s.

(d) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(n) = n - 3$.

(e) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = y$ tale che $x^4 + y^4 = 1$.

(f) $A = [-1, 1]$, $B = [0, +\infty[$, $f(x) = y$ tale che $x^4 + y^4 = 1$.

Soluzioni

(a) La relazione è una funzione, non suriettiva (nessun studente si chiama Asdrubale...). Sarà iniettiva se e solo se non ci sono due studenti con lo stesso nome.

(b) La relazione è una funzione, non suriettiva. Sarà iniettiva se e solo se non ci sono due studenti con la stessa pressione massima.

(c) La relazione è una funzione biiettiva.

(d) La relazione è una funzione iniettiva, non suriettiva.

(e) La relazione non è una funzione (ad esempio non esiste alcun valore y da associare a $x = 2$).

(f) La relazione è una funzione. Non è iniettiva (ad esempio $f(\frac{-1}{2}) = f(\frac{1}{2})$) e non è suriettiva.

Esercizio 2 Si risolvano in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

(a) $|x + 2| < 3$,

(b) $2 + |x - 1| < 5$,

(c) $|1 - x| > 2$.

Soluzioni

(a) $]-5, 1[$. (b) $]-2, 4[$. (c) $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$.

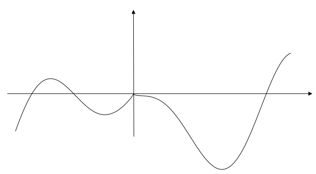
Esercizio 3 Si considerino le funzioni

$$f(x) = x^2 - 4; \quad g(x) = x - 2; \quad h(x) = 2.$$

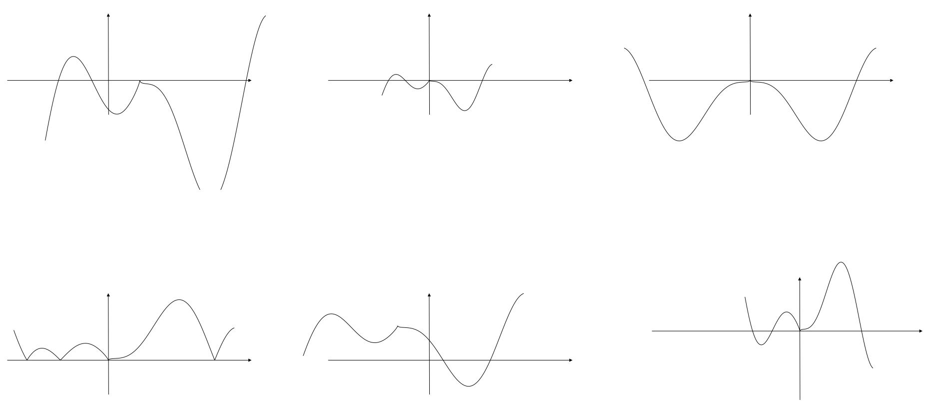
Si scriva l'espressione analitica delle funzioni composte: $f\big(g(x)\big)$, $g\big(f(x)\big)$, $f\big(h(x)\big)$, $h\big(f(x)\big)$, $g\big(h(x)\big)$, $h\big(g(x)\big)$.

Soluzioni
Nell'ordine: $x^2 - 4x$, $x^2 - 6$, 0, 2, 0, 2.

Esercizio 4 Si consideri la funzione f il cui grafico è rappresentato nel diagramma seguente:



Nei diagrammi seguenti sono riportati, ma non nell'ordine, i grafici delle funzioni:
(a) $f_1(x) = \frac{1}{2} f(2x)$, (b) $f_2(x) = f(|x|)$, (c) $f_3(x) = -f(2x)$,
(d) $f_4(x) = |f(x)|$, (e) $f_5(x) = 2f(x - \frac{1}{2})$, (f) $f_6(x) = f(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$.



Si determinino le funzioni a cui corrispondono i grafici rappresentati.

Soluzione Nell'ordine i grafici si riferiscono alle funzioni: (e), (a), (b), (d), (f), (c).

Esercizio 5 Si determini il periodo (minimo) della funzione

$$f(x) = \operatorname{sen}(3x) + \cos(5x).$$

Soluzione 2π (I periodi di $\operatorname{sen}(3x)$ sono $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}, \ldots$, quelli di $\cos(5x)$ sono $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{10\pi}{5}, \ldots$. Il più piccolo periodo in comune è dunque 2π.)

Esercizio 6 Di una progressione aritmetica $(a_n)_n$ si conoscono $a_7 = 17$ e $a_3 = 1$. Si determinino a_0, e la ragione q della progressione.

Soluzione $q = 4$, $a_0 = -11$.

Esercizio 7 Di una progressione geometrica $(b_n)_n$ si conoscono $b_1 = 1$ e $b_4 = 2$. Si determinino b_2, b_3 e la ragione q della progressione.

Soluzione $q = \sqrt[3]{2}$, $b_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $b_2 = \sqrt[3]{2}$, $b_3 = \sqrt[3]{2^2}$.

Esercizio 8 In una coltura batterica sono presenti inizialmente N_0 batteri. Il loro numero raddoppia dopo 2 ore e 50 minuti. Quanti batteri saranno presenti dopo 24 ore? Quando il numero di batteri sarà pari al 25% della quantità finale?

Soluzione Circa $256N_0$; circa dopo $17 - 18$ ore.

2 ore e 50 minuti sono $\frac{17}{6}$ di ora. Questo è il tempo di raddoppio della popolazione. In 24 ore ci sono $24 \cdot \frac{6}{17}$ tempi di raddoppio che possiamo approssimare a 8. Perciò la popolazione dopo 24 ore sarà circa $N_8 = N_0 \cdot 2^8 = 256N_0$. La quantità di batteri sarà pari ad $\frac{1}{4}$ della popolazione finale due tempi di raddoppio prima, quindi dopo 6 tempi di raddoppio, circa dopo $17-18$ ore (l'incertezza è causata dall'approssimazione).

Esercizio 9 Si scriva l'equazione cartesiana della retta passante per i due punti $(1, -2)$ e $(e, 3)$.

Soluzione $y = \frac{5}{e-1}x - \frac{5}{e-1} - 2$

Esercizio 10 Si consideri la funzione

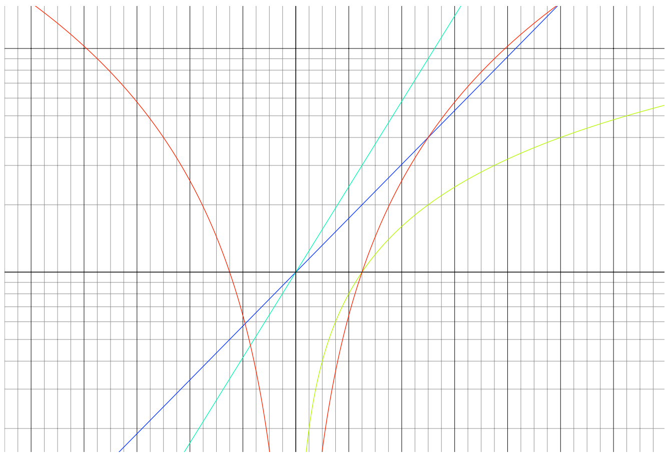
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Si verifichi che $f(x) \leq \frac{1}{2\sigma}$ se $|x - \mu| \geq \sigma$.

Soluzione Se $|x - \mu| \geq \sigma$ si ha $\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \leq -\frac{1}{2}$ e quindi, per la crescenza della funzione esponenziale, $f(x) \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{e}}$. Osservando poi che $e > 2$ e $\pi > 1$ si conclude $f(x) \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{4\pi}} < \frac{1}{2\sigma}$.

Esercizio 11 Il diagramma seguente è in scala lineare in ascissa e logaritmica in ordinata. Si identifichino sul diagramma le funzioni:

(a) $f_1(t) = t$, (b) $f_2(t) = 2^t$, (c) $f_2(t) = 3^t$, (d) $f_4(t) = t^2$.

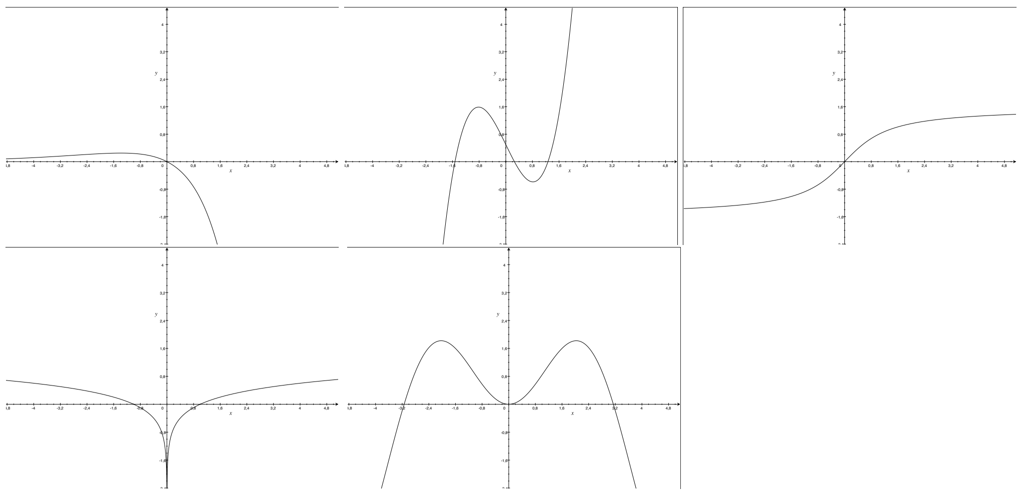


Soluzioni I grafici delle funzioni sono, nell'ordine: giallo-verdino, azzurro, celeste, rosso.

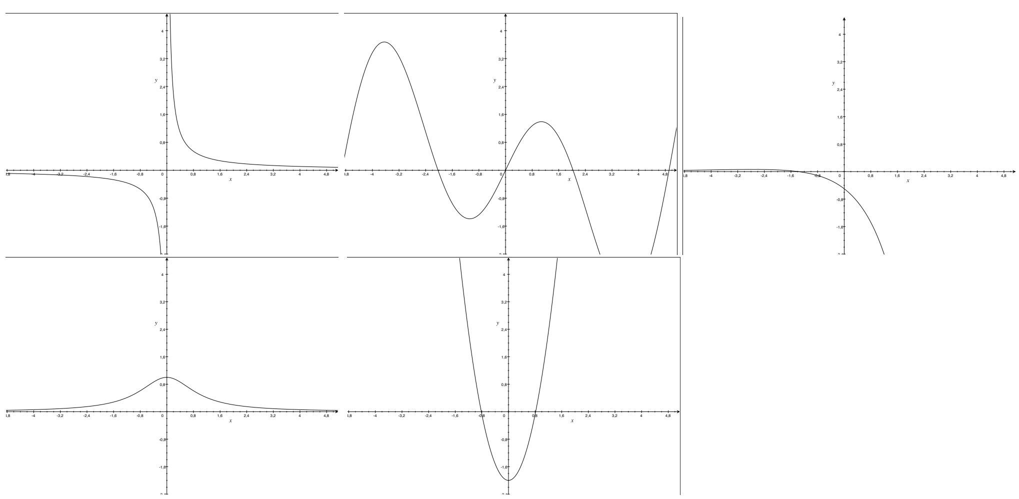
Esercizio 12 Nei diagrammi seguenti sono riportati i grafici di alcune funzioni, nell'ordine, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.

Successivamente sono riportati i grafici delle derivate delle funzioni, ma non nell'ordine. Si stabilisca la corretta corrispondenza tra i grafici.

Funzioni:



Derivate:



Soluzioni 1-3; 2-5; 3-4;4-1;5-2.