Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi sulle equazioni differenziali.

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si classifichino le seguenti equazioni, come ordinarie o alle derivate parziali; si dica se sono autonome, lineari, se lineari omogenee e se ne determini l'ordine:

$$\text{a) } 2(u-1)u' = 2t+1 \quad ; \quad \text{b) } \log\left(\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\right)\frac{dy}{dx} - e^{2x}y = \sin\sqrt{x} \quad ;$$

$$\text{c) } xy\langle \nabla u(x,y), (x,y)^T\rangle = 3 \quad ;$$

$$\text{d) } \frac{d}{dx}(xy'(x)) + 2y(x) = f(y) \quad ; \quad \text{e) } \Delta u = 0 \quad ; \quad \text{f) } \mathrm{div}(\mathrm{rot} g) = 0$$

$$\text{g) } y^{(4)}\sin x + 3y''\cos x + y^{(5)} - g(x) = 0 \quad ; \quad \text{h) } \sum_{i=1}^{3} a_i(x)y^{(i)}(x) = 0 \quad .$$

Esercizio 2 Si consideri l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

che modella la diffusione dell'energia termica di un filo nel punto x all'istante t. Si verifichi che la funzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

è soluzione di tale equazione, dove $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una qualunque successione limitata di numeri reali.

Esercizio 3 Senza calcolare le soluzioni cosa si può dire riguardo l'esistenza, l'unicità e l'esistenza globale dei seguenti problemi di Cauchy ? (Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione continua)

$$(a) \quad \begin{cases} y' = \cos(xy) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad ; \qquad (b) \quad \begin{cases} y' = g(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$(c) \quad \begin{cases} y' = e^{xy} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad ; \qquad (d) \quad \begin{cases} y' = y^{-1} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad .$$

Esercizio 4 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali:

$$(a) \quad u' = 2^u; \qquad (b) \quad x^2y' + y = 0; \qquad (c) \quad y' = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{ye^y}.$$

Esercizio 5 Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy (specificando l'intervallo di definizione delle soluzioni):

$$(a) \quad \begin{cases} yy' = 1 \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad ; \qquad (b) \quad \begin{cases} yy' = 1 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$(c) \quad \begin{cases} y' = 2t\sqrt{1-y^2} \\ y(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad ; \qquad (d) \quad \begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases} \quad .$$

Esercizio 6 Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{t} + \tan\frac{x}{t} \\ x(1) = \pi/4 \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} y' = \frac{xy-y^2}{x^2} \\ y(e) = e \end{cases} \quad .$$

Esercizio 7 Determinare un'equazione della curva del piano xy che passa per il punto $(2,3)^T$ e la cui pendenza in ogni suo punto $(x,y)^T$ è uguale a $\dfrac{2x}{1+y^2}$.

Esercizio 8 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine:

$$x' + xt - t = 0; \qquad y' + 3x^2 y = 6x^2.$$

Esercizio 9 Si consideri un corpo in caduta libera immerso in un fluido (si pensi ad esempio ad un paracadutista durante un lancio). Si studino le leggi del moto.

La seconda legge di Newton stabilisce che $F = m\,a$. Nel nostro esempio la forza ha due componenti: la forza di gravità, $m\,g$, che agisce dall'alto verso il basso, e la forza di attrito f_{attr}, che agisce in senso inverso ed è funzione della velocità del corpo.

L'equazione del corpo in caduta si può allora scrivere come segue: $mx'' = mg - f_{\mathrm{attr}}(x')$.

L'equazione è solo apparentemente di secondo grado. Infatti si può pensare di risolverla rispetto alla velocità $v = x'$. L'equazione diventa allora $mv' = mg - f_{\mathrm{attr}}(v)$.

Si studi l'equazione proposta nei casi

a) $f_{\mathrm{attr}}(x') = kx'$ (buona approssimazione ad esempio per un corpo non troppo veloce in caduta nell'acqua);

b) $f_{\mathrm{attr}}(x') = k(x')^2$ (buona approssimazione ad esempio per il paracadutista in caduta libera).

Esercizio 10 Si risolvano le seguenti equazioni lineari:

$$y' + \frac{y}{x} = e^x; \qquad y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{1}{x(1+x^2)};$$

$$y' \cos x = y \sin x + \sin 2x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

(Soluzioni: $y(x) = \lambda \frac{1}{x} + e^x - \frac{e^x}{x}$, $y(x) = \frac{\lambda}{1+x^2} + \frac{\log|x|}{1+x^2}$ definita su $]0, +\infty[$ oppure $]-\infty, 0[$, $y(x) = \frac{\lambda}{\cos(x)} + \sin x \cdot \operatorname{tg} x$.)

Esercizio 11 Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = yx \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} y' = y - xy^{1/3} \\ y(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad .$$

(Soluzioni: $y(x) = 2e^{x \sin x + \cos x - 1}$; $y(x) = \left(\left((\frac{\pi}{4})^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{2}\right) e^{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}} + \frac{3}{2} + x\right)^{\frac{3}{2}}$.)

Esercizio 12 Determinare una soluzione dell'equazione $y'' + y = 0$; che soddisfa le seguenti *condizioni al contorno*: $y(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot y(0)$; $y(\frac{\pi}{4}) = 3$. (Soluzione: $y(x) = \sqrt{2} \cos x + 2\sqrt{2} \sin x$.)

Esercizio 13 (Equazione logistica) Si trovi l'integrale generale dell'equazione $y' = ay(1 - by)$; dove a e b sono costanti reali positive.

Si applichi la soluzione trovata per studiare il seguente modello di crescita di una popolazione (Verhulst):

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N(t) \left(1 - \frac{1}{k} N(t)\right);$$

dove $N > 0$ indica il numero di individui che costituiscono la popolazione, $k > 0$ rappresenta la capacità dell'ambiente di offrire risorse atte alla sopravvivenza, $\varepsilon > 0$. Si studi l'andamento delle soluzioni in dipendenza della condizione iniziale $N_0 = N(0)$, distinguendo i vari casi $N > k$, $N = k$, $N < k$.

(Soluzione $N(t) = \dfrac{kN_0 e^{\varepsilon t}}{k - N_0 + N_0 e^{\varepsilon t}}$.)

Esercizio 14 Sia dato un circuito elettrico RL (resistenza-induttanza). Le leggi di Ohm e di Kirchhoff forniscono la seguente equazione:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

dove I indica la corrente che circola nel circuito all'istante t, E è la forza elettromotrice. Il tempo $t = 0$ indica il momento in cui si chiude il circuito, dunque si suppone $I(0) = 0$.

a) Si calcoli la corrente del circuito supponendo che la resistenza sia pari a 12 Ω e l'induttanza a 4 H. Si supponga inoltre che la forza elettromotrice sia fornita da una batteria con costante voltaggio di 60 V. Si calcoli $I(t)$ e il valore limite della corrente (cioè la situazione a regime).

b) Si supponga ora che la resistenza e l'induttanza siano le stesse del problema precedente, ma che la forza elettromotrice sia fornita da una generatore a corrente alternata del tipo $E(t) = 60 \sin(30t)$ volts. Si trovi $I(t)$.

Esercizio 15 Sia dato un circuito elettrico RLC (resistenza-induttanza-capacità). Le leggi di Ohm e di Kirchhoff forniscono la seguente equazione:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t),$$

dove I indica la corrente che circola nel circuito all'istante t, Q è la carica del condensatore all'istante t, E è la forza elettromotrice. Poiché $I = \frac{dQ}{dt}$ l'equazione diventa

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t).$$

Il tempo $t = 0$ indica il momento in cui si chiude il circuito, dunque si suppone $I(0) = 0$. Supponiamo inoltre che il condensatore sia inizialmente scarico, dunque $Q(0) = 0$. Si calcoli la corrente del circuito supponendo che la resitenza sia pari a 40 Ω, la capacità a $16 \cdot 10^{-4} F$ e l'induttanza a 1 H. Si supponga inoltre che la forza elettromotrice sia fornita da un generatore a corrente alternata del tipo $E(t) = 100\cos(10t)$. Si trovi la carica del condensatore e la corrente del circuito al tempo t. (Sol. $Q(t) = 4/697[e{-}20t/3(-63\cos 15t - 116\sin 15t) + (21\cos 10t + 16\sin 10t)]$).

Esercizio 16 Una reazione chimica di due sostanze che interagiscono in una soluzione si può rappresentare mediante l'equazione

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x) \cdot (b - x),$$

dove $x(t)$ rappresenta la concentrazione della nuova sostanza presente nella soluzione al tempo t e a e b rappresentano le concentrazioni iniziali delle due sostanze interagenti. Dunque a e b sono costanti positive non maggiori di 1 e si suppone che non vi sia traccia della sostanza x all'istante iniziale ($x(0) = 0$). Si trovi la funzione $x(t)$ che descrive la produzione di sostanza x nel tempo, tenendo conto dei possibili casi $a = b$, $a > b$ e $a < b$. Qual è la concentrazione di x a regime? (Soluzione: $x(t) = \frac{ab(1-e^{k(b-a)t})}{a-be^{k(b-a)t}}$ se $a \neq b$, $x(t) = \frac{a^2kt}{akt+1}$ se $a = b$.)

Esercizio 17 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali ordinarie:

$$\text{a) } y'' + y = \frac{1}{\cos x} \quad (0 < x < \pi/2)\,; \qquad \text{b) } y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2};$$

$$\text{c) } y^{(iv)} + y' = x; \qquad \text{d) } y''' - y' = (3 - x)e^{-2x};$$

$$\text{e) } y''' + y' = x^2 + x; \qquad \text{f) } y^{vi} + y^{v} + x^{iv} + x^{iii} = x + 2e^{x} = x.$$

Esercizio 18 Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy:

$$\text{a) } \begin{cases} y' + y = x + e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}; \qquad \text{b) } \begin{cases} x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x \\ y(\pi) = 0 \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} y'' - y' + y = \sin x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}; \qquad \text{d) } \begin{cases} y'' = x + \sin x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \end{cases};$$

$$\text{e) } \begin{cases} y'' = -y^{-3}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 19 Si risolvano le seguenti equazioni:

$$\text{a) } 3x^2y'' + xy' + 7y = 0, \qquad \text{b) } \quad x^2y'' - 2xy' + 2y = x,$$
$$\text{c) } (x+1)^2y'' - 3(x+1)y' + 4y = (x+1)^3.$$

Esercizio 20 Si risolvano i seguenti sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\text{a) } \begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases} \qquad \text{b) } \quad \begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y + t \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} x' = ay + bz \\ y' = cz \\ z' = 0 \\ x(0) = c_1 \\ y(0) = c_2 \\ z(0) = c_3 \end{cases} \qquad .$$