Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi sulle curve, le superfici, i campi vettoriali.
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^1 su $[a, b]$. Si consideri la curva definita dal grafico Γ_f della funzione f.

Si provi che la lunghezza s dell'arco della curva è data dalla formula

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Esercizio 2 Si calcoli la lunghezza della curva piana definita come grafico della funzione $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ con $x \in [1, 8]$.

Esercizio 3 Si calcoli l'area del cilindro (solo la superficie laterale, senza base né tappo...) delimitato dal grafico della funzione $f(x, y) = y^2$ e dalla semicirconferenza $x = \cos t$, $y = \sin t$ per $\pi \leq t \leq 2\pi$.

(Cioè la superficie $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \leq z \leq y^2,\ \pi \leq t \leq 2\pi.\}$)

Esercizio 4 Sia $f : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ una funzione crescente di classe C^1, e sia g la funzione inversa $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, $g = f^{-1}$, sempre di classe C^1.

Si provi che

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy.$$

Esercizio 5 Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\gamma(t) = (\sin(6t), \cos(6t), 4t)^T.$$

Si calcoli l'ascissa curvilinea di γ e si riparametrizzi la curva secondo la lunghezza d'arco. Si verifichi che il vettore tangente, rappresentato in tale parametrizzazione, è unitario.

Esercizio 6 Sia $\gamma(t)$ una curva semplice il cui sostegno è il grafico nel piano xy della funzione $f(x) = x^2$ per $x \in [0, 1]$, seguito dal segmento che congiunge il punto $(1, 1)^T$ con il punto $(2, 0)^T$.

Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_\gamma 2x\, ds$.

Esercizio 7 Si calcoli il momento di inerzia rispetto all'asse z di un filo sospeso avente la forma di un arco di catenaria, di equazione $z = \cosh x$, per $|x| \leq 1$.

Esercizio 8 Si calcoli la lunghezza totale dell'astroide, curva di equazione

$$\varphi(\vartheta) = (\cos^3 \vartheta, \sin^3 \vartheta)^T;$$

con $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$.

Esercizio 9 Si indichi con L (e non la si calcoli!) la lunghezza dell'arco di ellisse

$$\varphi(t) = (2 \cos t, \sin t)^T;$$

con $t \in [0, \pi]$.
Si determini il baricentro di tale arco, supposto omogeneo, in funzione di L.

Esercizio 10 Si calcoli il baricentro dell'elica circolare omogenea

$$\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)^T;$$

con $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 11 Si trovi un'equazione parametrica per rappresentare la parte limitata del paraboloide ellittico $y = 6 - 3x^2 - 2z^2$, delimitato dal piano xz. Si scriva l'equazione del piano tangente nel generico punto. (Sol. Ad esempio $x(u, v) = u$, $y(u, v) = 6 - 3u^2 - 2v^2, z(u, v) = v$; dove $(u, v)^T \in \{(u, v)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{3} \leq 1\}$; il piano tangente è $6x_0x + y + 4z_0z - 3x_0^2 - 2z_0^2 - 6 = 0$.)

Esercizio 12 Si consideri la superficie rappresentata dalle seguenti equazioni parametriche $x(u, v) = uv, \quad y(u, v) = ue^v, \quad z(u, v) = ve^u$, con $(u, v)^T \in \mathbb{R}^2$. Si dica se la superficie è regolare e si calcoli l'equazione del piano tangente nel generico punto della superficie. (Sol. La superficie è regolare in ogni punto ad eccezione del punto $(1, e, e)^T$. Il piano tangente la superficie nel punto $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$ è $e^{u+v}(1-uv)(x-uv)+ve^u(u-1)(y-ue^v)+ue^v(v-1)(z-ve^u) = 0$. Il piano tangente non è definito nel punto $(1, e, e)^T$ che si ottiene per $(u, v)^T = (1, 1)^T$.)

Esercizio 13 Si calcoli l'area della parte del paraboloide iperbolico $z = y^2 - x^2$ che è delimitata dai cilindri $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. (Sol. $\frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right)$.)

Esercizio 14 Si calcoli l'integrale $\iint_S z \, d\sigma$, dove S è la superficie definita dal cilindro di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1$, dal disco $D = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\, z = 0\}$ e dalla porzione di piano $\pi = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x - z + 1 = 0;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. (Sol. $\iint_S z \, d\sigma = \pi \left(\sqrt{2} + \frac{3}{2}\right)$.)

Esercizio 15 Si consideri il solido generato da un triangolo equilatero di lato a, ruotato attorno ad uno dei suoi lati. Si usino i teoremi di Pappo-Guldino per determinare la superficie e il volume del solido. (Sol. Il volume è $\frac{\pi}{4}a^3$, l'area è $\sqrt{3}\pi a^2$.)

Esercizio 16 Siano $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale opportunamente differenziabile e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo scalare opportunamente differenziabile. Si dica se ha senso considerare i seguenti operatori:

$$\text{rot}\,(\nabla g); \qquad \text{rot}\,(\nabla f); \qquad \text{rot}\,(\text{div}\, f);$$
$$\text{div}\,(\text{rot}\, g); \qquad \nabla(\text{div}\, g); \qquad \nabla(\text{div}\, f);$$
$$\text{rot}\,(\text{rot}\, g); \qquad \text{div}\,(\nabla f); \qquad f(\text{rot}\, g).$$

Esercizio 17 Siano $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale opportunamente differenziabile e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo scalare opportunamente differenziabile. Si provi che

$$\text{rot}\,\nabla f = \overline{0}; \qquad \text{div}\,\text{rot}\, g = 0; \qquad \text{div}\,\nabla f = \triangle f; \qquad \text{rot}\,(\text{rot}\, g) = \nabla \text{div}\, g - \triangle g.$$

dove $\triangle f = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ è detto il Laplaciano di f.

Esercizio 18 Si determini una funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi(x,y) \\ \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

sia conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$.

Esercizio 19 Si calcoli il lavoro compiuto dal campo $g(x,y,z) = (xy, yz, zx)^T$; nel muovere una particella di massa unitaria lungo la curva di equazioni $x(t) = t; \quad y(t) = t^2; \quad z(t) = t^3$; dove $t \in [0,1]$.

Esercizio 20 È noto che il campo

$$g(x,y) = (ye^x, e^x - \cos y)^T$$

è conservativo.

Si calcoli il lavoro compiuto da F per muovere una particella di massa unitaria lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$; con $\gamma(t) = (t\cos t, 1 - \sin t)^T$.

Esercizio 21 Si usi la formula di Gauss-Green per calcolare l'area della regione del piano, contenuta nel primo quadrante, delimitata superiormente dalla retta $y = \frac{1}{2}$ e inferiormente dalla parabola $2y = x^2$.(Sol $\frac{1}{3}$)

Esercizio 22 Si usi la formula di Gauss-Green per calcolare l'integrale

$$\oint_C (3y - e^{\sin x})\, dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\, dy,$$

dove C è il cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 9$, orientato in verso antiorario. (Sol. 36π)

Esercizio 23 Si consideri il campo vettoriale

$$g(x, y, z) = (y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{3z})^T.$$

Si provi che g è un campo conservativo e si calcoli un suo potenziale.

Esercizio 24 La legge di Newton sulla gravitazione universale stabilisce la nota formula per la forza gravitazionale tra due masse m e M:

$$F(\mathbf{x}) = -G\frac{mM}{||\mathbf{x}||^3}\mathbf{x}.$$

Si verifichi che F è un campo conservativo, calcolando esplicitamente un suo potenziale U.

Esercizio 25 Si verifichi che il campo

$$g(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)^T$$

è irrotazionale. Si calcoli il lavoro compiuto dal campo su una particella di massa unitaria che percorre il circolo unitario di centro l'origine in verso antiorario. Si concluda che il campo g non è conservativo. Questo esempio contraddice il teorema che afferma che un campo è conservativo se e solo se è irrotazionale?

Esercizio 26 Si calcoli il lavoro compiuto dal campo di forze

$$F(x, y, z) = (xy, yz, zx)^T;$$

nel muovere una particella lungo la curva di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = t; \\ y(t) = t^2; \\ z(t) = t^3; \end{cases}$$

dove $t \in [0, 1]$.

Esercizio 27 (Conservazione dell'energia) Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo conservativo, e si indichi con U un suo potenziale. Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva regolare a tratti che rappresenta la legge oraria del moto di una particella di massa m nel campo. La quantità

$$K(t) = \frac{1}{2}m||\gamma'(t)||^2$$

è l'energia cinetica posseduta dalla particella al tempo t, mentre $-U(\gamma(t))$ è la sua energia potenziale.

Ricordando la legge di Newton

$$m\gamma''(t) = F(\gamma(t)),$$

si dimostri che l'energia totale

$$E(t) = K(t) - U(\gamma(t))$$

è costante rispetto a t.

Esercizio 28 Si usi il teorema di Stokes per calcolare il valore assoluto del lavoro compiuto dal campo $g(x, y, z) = (-z, x, y)^T$ su una particella di massa unitaria che percorre la curva γ, intersezione del piano $z = y$ con il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$. (Il segno dipenderà dall'orientazione della curva; sol. $\frac{\pi}{2}$).

Esercizio 29 Si usi il teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo

$$g(x, y, z) = (ye^{x+y}, -xe^{x+y}, xy)^T$$

uscente dalla superfice del solido

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : |y| \le x \le 2 - |y|, \quad 0 \le z \le x + y\}.$$

Esercizio 30 Si provi che il campo $g(x, y, z) = (z + 1, y + 1, x + 1)^T$ è conservativo. Si calcoli $\int_\gamma \langle g, \tau \rangle \, ds$ dove γ è una curva congiungente i punti $(1, 2, 0)^T$ e $(3, 0, 4)^T$.

Esercizio 31 Si calcoli la circuitazione

$$\oint_\gamma (e^x \sin y + 3y) \, dx + (e^x \cos y + 2x - 2y) \, dy$$

sull'ellisse γ definita dall'equazione $4x^2 + y^2 = 4$ e percorsa in verso antiorario. (Sugg. si osservi che il campo è somma di un campo conservativo e di un campo facile da integrare. Sol. -2π).