Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi sul calcolo integrale in $\mathbb{R}^N$.

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Sia $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ un parallelepipedo di $\mathbb{R}^3$. Si diano le definizioni di decomposizione δ di R in sottoparallelepipedi; di somma inferiore e somma superiore di una funzione $f : R \to \mathbb{R}$; di integrale $\int_R f\, dm$.

Esercizio 2 Detto a il numero reale

$$a = \iint_D \sqrt{x^3 + y^3}\, dxdy \ , \qquad D = [0,1] \times [0,1],$$

si provi che $a \in [0, \sqrt{2}]$.

Esercizio 3 Senza utilizzare le formule di riduzione, ma tenendo presente le proprietà di linearità dell'integrale e la formula del volume di un prisma retto, si calcoli l'integrale della funzione $f(x, y) = 3x + 4y$ sul rettangolo $[0, 1] \times [0, 2]$.

Esercizio 4 Si calcolino i seguenti integrali:

a) $\displaystyle\iint_R x \sin(x + y)\, dxdy$ dove $R = [0, \frac{\pi}{6}] \times [0, \frac{\pi}{3}]$.

b) $\displaystyle\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1}\, dxdy$ dove $R = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, |y| \le 3\}$.

c) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x + y}\, dxdy$ dove $R = [1, 2] \times [0, 1]$.

(Sol. a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{12}$; b) $9 \log 2$; c) $\log(\frac{27}{16})$.)

Esercizio 5 Si calcoli il volume del solido delimitato dal paraboloide ellittico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, dai piani $x = 2$, $y = 2$ e dai 3 piani coordinati.

(Sol. 48.)

Esercizio 6 Si calcoli il volume della zona di spazio delimitata superiormente dal piano

$$z = 2x + 5y + 1,$$

situata sopra al rettangolo

$$\{(x, y, 0)^T \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x \le 0;\ 1 \le y \le 4\}.$$

(Sol. $\frac{75}{2}$.)

Esercizio 7 Si calcoli il volume del solido delimitato dalla superficie

$$x\sqrt{4x^2+4y}-2z=0$$

e dai piani $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ e $z=0$.

(Sol. $\frac{8\sqrt{2}-4}{15}$.)

Esercizio 8 Si calcoli l'integrale triplo

$$\iiint_R \frac{xz}{y}\,dxdydz \qquad \text{dove} \quad R=[0,1]\times[1,2]\times[0,1].$$

(Sol. $\frac{\log 2}{4}$.)

Esercizio 9 Si calcoli l'integrale

$$\int_D 4y^3\,dm$$

dove D è l'insieme del piano delimitato dalle curve $y=x-6$ e $y^2=x$.

(Sol. $\frac{500}{3}$.)

Esercizio 10 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy.$$

(Operando direttamente sul problema così come viene proposto si incontrano notevoli difficoltà. Conviene allora invertire l'ordine di integrazione.)

(Sol. $\frac{e^9-1}{6}$.)

Esercizio 11 Si calcoli l'integrale

$$\iint_E \frac{x}{y}\,dxdy$$

nella regione

$$E=\{(x,y)^T\in\mathbb{R}^2\colon x\geq 0,\ x^2+(y-2)^2\leq 1\}.$$

(Sol. $2-\frac{3\log 3}{2}$.)

Esercizio 12 Si trovino la massa ed il centro di massa di una lamina triangolare di vertici $(0,0)^T$, $(1,0)^T$, $(0,2)^T$ la cui densità è descritta dalla funzione $\rho(x,y)=1+3x+y$.

Ricordo che la massa e le coordinate del centro di massa sono date rispettivamente da m e $(\hat{x}, \hat{y})^T$, con

$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dxdy, \qquad \hat{x} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x,y)\, dxdy \quad \hat{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x,y)\, dxdy.$$

(Sol. $m = \frac{8}{3}$, $\hat{x} = \frac{3}{8}$, $\hat{y} = \frac{11}{16}$.)

Esercizio 13 Si calcoli l'integrale

$$\iint_A e^{x+y}\, dxdy;$$

nella regione

$$A = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

(Sol. $e - e^{-1}$.)

Esercizio 14 Si calcoli il volume del solido delimitato dal cilindro $x = y^2$ (cioè dall'insieme $\{(y^2, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$) e dai piani $z = 0$ e $x + z = 1$.

(Sol. $\frac{8}{15}$.)

Esercizio 15 Si calcoli il volume del solido

$$E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - x\}.$$

(Sol. 2π.)

Esercizio 16 Si calcoli il volume della sfera in tre modi:
a) usando un integrale doppio;
b) usando un integrale triplo ed integrando per sezioni;
c) usando un integrale triplo e coordinate sferiche.

Esercizio 17 Si calcoli il momento di inerzia rispetto al piano xy,

$$I_{xy} = \int_S z^2 dm$$

del solido S:

$$S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4;\ z \geq 0;\ z^2 \geq x^2 + y^2\}.$$

(Sol. $\frac{31}{30}\pi(4 - \sqrt{2}$.)

Esercizio 18 Si calcoli il volume del solido

$$D = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2 \le 4;\ 0 \le z \le x^2+y^2\}.$$

Si tratta della regione compresa tra i due cilindri di raggio 1 e 2 rispettivamente, che si trova sotto al paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$.

(Sol. $\frac{15\pi}{2}$.)

Esercizio 19 Si calcoli il volume del solido ottenuto dall'intersezione di due cilindri a base circolare di raggio unitario perpendicolari tra di loro:

$$E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1;\ x^2+z^2 \le 1\}.$$

(Sugg.: si integri per sezioni.) (Sol. $\frac{16}{3}$.)

Esercizio 20 Si calcoli il centro di massa del solido S che occupa il primo ottante dello spazio $\mathbb{R}^3$ (cioè $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$) ed è contenuto nella sfera $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, se la densità del corpo è proporzionale alla distanza dall'origine (cioè $\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

(Sol. $\frac{2}{5}R(1,1,1)^T$.)

Esercizio 21 Sia S un solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse z la figura

$$F = \{(x,z)^T \in \mathbb{R}^2 : a \le z \le b; f(z) \le x \le g(z)\};$$

dove $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue.
Si provi che il momento di inerzia rispetto all'asse z ($I_z = \iiint_S x^2+y^2\, dxdydz$) del solido è uguale a

$$I_z = \frac{\pi}{2}\int_a^b \left[g^4(z) - f^4(z)\right]\, dz.$$

(Sugg.: si integri per sezioni.)

Esercizio 22 Si calcolino il volume e il baricentro del solido

$$S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : (1-z)^2 \le x^2+y^2 \le 1\}.$$

(Sol. $V = \frac{4}{3}\pi$, $(0,0,1)^T$.)

Esercizio 23 Siano $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ tre vettori di $\mathbb{R}^3$. Si definisce prodotto misto (o triplo) di $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$ il numero $\langle \overline{a} \wedge \overline{b}, \overline{c}\rangle$ ($\wedge$ indica il prodotto vettoriale, $\langle\ ,\ \rangle$ indica il prodotto scalare). Si verifichi che $\langle \overline{a} \wedge \overline{b}, \overline{c}\rangle = \det A$, dove A è la matrice quadrata che ha per colonne le componenti dei tre vettori. Si provi che $|\langle \overline{a} \wedge \overline{b}, \overline{c}\rangle|$ è il volume del parallelepipedo individuato da $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$.

Esercizio 24 Si calcoli l'integrale

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

dove

$$D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \le 1;\ y \ge x\}.$$

(Sol. $\frac{2}{9}(8-5\sqrt{2})$.)

Esercizio 25 Si calcoli il volume della regione di spazio interna alla semisfera di equazione

$$x^2+y^2+z^2 = 4$$

con $z \ge 0$ ed esterna (cioè che sta sotto) al cono di equazione

$$z^2 = x^2+y^2$$

(cioè $z \le \sqrt{x^2+y^2}$).

(Sol. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.)

Esercizio 26 Si usino coordinate ellittiche per calcolare l'integrale

$$\iint_E (x+y)\ dxdy$$

dove E è la regione interna all'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(Sol. 0.)

Esercizio 27 Si calcoli la massa del cono

$$\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \in [1,2],\ z \le 2-\sqrt{x^2+y^2}\}$$

se la sua densità nel punto $(x,y,z)^T$ è

(i) direttamente proporzionale al quadrato della distanza del punto dal piano $z = 0$,

(ii) inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto dal piano $z = 0$.

(Sol. (i) $\frac{8\pi}{15}$, (ii) $\pi(3-4\log 2)$.)

Esercizio 28 Si consideri la seguente trasformazione lineare di coordinate nel piano:

$u = 3x-y$, $v = y-x$, e l'inversa $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u+3v}{2}$.

Si utilizzi tale trasformazione per calcolare più agevolmente l'integrale

$$\iint_D (3x-y)^{\frac{1}{5}} \left(-\frac{x}{4}+\frac{y}{4}\right) dxdy,$$

nel parallelogramma delimitato dalle rette $y=3x$, $y=x$, $y=3x-1$, $y=x+4$.

(Sol. $\frac{5}{6}$.)

Esercizio 29 Si consideri l'insieme

$$S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : y \in [1,+\infty); x^2+z^2 \leq \frac{1}{y^2}\}.$$

Si calcoli il volume di tale solido, calcolato come limite per $b \to +\infty$ del volume V_b del solido

$$S_b = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : y \in [1,b]; x^2+z^2 \leq \frac{1}{y^2}\}.$$

Si verifichi che l'area della sezione

$$\{(y,z)^T \in \mathbb{R}^2 : \exists\, x \geq 1,\ (x,y,z)^T \in S\},$$

è infinita.
Il risultato ottenuto sembra paradossale? Come fate a spiegare questo fatto?

(Sol. $V_b = \pi$.)

Esercizio 30 Si calcoli il centro di massa di una lamina omogenea a forma di quarto di corona circolare di raggio interno r e raggio esterno R.

(Sol. $\frac{4}{3\pi}\frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}(1,1)^T$.)

Esercizio 31 Si calcoli il volume della regione di $\mathbb{R}^3$ contenuta nella sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=6$ e sita sopra il paraboloide di equazione $z=x^2+y^2$.

(Sol. $2\pi\frac{6^{3/2}-11}{3}$.)

Esercizio 32 Si calcoli il momento di inerzia di una semisfera di raggio R rispetto ad un diametro della base.

(Sol. $\frac{4\pi R^5}{15}$.)

Esercizio 33 Si calcoli il momento di inerzia di un cono circolare retto di raggio di base R e altezza h
(a) rispetto al suo asse,
(b) rispetto ad un diametro della base.

(Sol. $\frac{\pi R^4 h}{10}$, $\frac{\pi R^2 h}{10}(\frac{R^2}{2}+\frac{h^2}{3})$.)

Esercizio 34 Si calcoli il centro di massa del tetraedro omogeneo di vertici $(0,0,0)^T$, $(1,0,0)^T$, $(0,\frac{1}{2},0)^T$, $(0,0,\frac{1}{4})^T$.

(Sol. Massa $\frac{1}{48}$, centro di massa $(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16})^T$.)

Esercizio 35 Si calcolino gli integrali generalizzati:

$$a) \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} |y|e^{-x^2-y^2}\,dxdy,$$

$$b) \qquad \iiint_{E_a} \sqrt{z}\,dxdydz \qquad E_a = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z > a,\ x^2+y^2 \le z^{-2}\},\ \text{con } a \ge 0.$$

$$c) \qquad \iint_E \left(\frac{1}{x^2}+y\right)\,dxdy \qquad E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \frac{1}{x} \le 1,\ x+y \ge 2\}.$$

(Sol. a) $\sqrt{\pi}$; b) $\frac{2\pi}{\sqrt{a}}$ se $a > 0$, $+\infty$ se $a = 0$; c) $\log 2 - \frac{1}{6}$.)

Esercizio 36 Si provi che, per ogni $N > 1$, una funzione localmente integrabile f definita su un sottoinsieme localmente misurabile $E \subset \mathbb{R}^N$ è integrabile in senso generalizzato su E se e solo se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato su E. Vale la stessa cosa se $N = 1$?

(Sol. $|f| = f^+ + f^-$. Se $N = 1$ la cosa non è vera; es. $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = (-1)^n\frac{1}{n}$ se $x \in [n,n+1[$.)