Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi sul calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$.
Professor Franco Obersnel

Esercizio 1 Si calcoli la derivata direzionale nell'origine lungo la direzione del versore $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$.

(Sol. $v_1 v_2^2$.)

Esercizio 2 Si calcolino (nel generico punto del dominio) le derivate parziali e il gradiente delle funzioni
a) $f(x,y) = \log(x+y)$;
b) $g(x,y,z) = zx^y$;
c) $h(s,t,u,v,w) = s + 2t + 3u^2 + 4v^3 + stuvw$;
d) $k(x,\phi) = x\sin(x\phi + 3)$.

(Sol. $\frac{1}{x+y}(1,1)^T$, $(zyx^{y-1}, zx^y \log x, x^y)^T$, $(1+tuvw, 2+suvw, 6u+stvw, 12v^2+stuw, stuv)^T$, $(\sin(x\phi+3) + x\phi\cos(x\phi+3), x^2\cos(x\phi+3))^T$.)

Esercizio 3 Si scriva (nel generico punto del dominio) la matrice Jacobiana delle seguenti funzioni:
a) $f(x,y) = (x + xy, e^{xy})^T$;
b) $g(x,y,z) = (xy\cos z, x^2 + y)^T$;
c) $h(x,y) = (x^2y + \log y, y^2x + \log x, xy, x - y)^T$;
d) $k(u,v) = (\cos u \sin u, v^v)$.

(Sol. $\begin{pmatrix} 1+y & x \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y\cos z & x\cos z & -xy\,\mathrm{sen}\, z \\ 2x & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 2xy & x^2+1/y \\ y^2+1/x & 2xy \\ y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2\cos^2 u - 1 & 0 \\ 0 & v^v(\log v + 1) \end{pmatrix}$.)

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}.$$

a) Si consideri la restrizione della f alla curva $y = x^2$.
b) Si calcoli il limite per $(x,y)^T \to (0,0)^T$ di tale restrizione.
c) Si deduca da b) che la funzione f non è continua nell'origine.
d) Si verifichi che la funzione f è derivabile in ogni direzione (cioè ammette finite tutte le derivate direzionali) nell'origine.

(Sol. b) 1/2. d) La derivata direzionale lungo la direzione del versore $(v_1, v_2)^T$ è v_1^2/v_2 se $v_2 \neq 0$, altrimenti è 0.)

Esercizio 5 Si calcoli il differenziale nel punto $(e, 3)$ della funzione $f(x, y) = x^y$.

(Sol. $df(e, 3)(v_1, v_2) = e^2(3v_1 + ev_2)$.)

Esercizio 6 Si scriva l'equazione del piano tangente la superficie di equazione $z = \ln(2x + y)$ nel punto $(-1, 3, 0)^T$.

(Sol. $2x + y - z - 1 = 0$.)

Esercizio 7 Si calcoli la derivata direzionale nel punto $(1, 1, 1)^T$ lungo la direzione del vettore $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$ della funzione $f = (f_1, f_2)^T : \quad f_1(x, y, z) = x^2 y \log(xz); \quad f_2(x, y, z) = \frac{y}{x} e^{xyz}$.

(Sol. $\frac{1}{\sqrt{14}}(4, 7e)^T$.)

Esercizio 8 Si provi che è differenziabile nel suo dominio la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{se } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases} .$$

(Sol. Nel punto $(0, 0)^T$ il differenziale è 0, infatti $\displaystyle\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$. In alternativa si può utilizzare il teorema del differenziale totale.)

Esercizio 9 Si calcolino nell'origine le derivate parziali e le derivate direzionali rispetto alla direzione del versore $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{se } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases} .$$

Vale la formula $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$? Come si giustifica questo fatto?

(La formula non vale; si osservi che la funzione non è differenziabile.)

Esercizio 10 È data una funzione differenziabile $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si conoscono le derivate direzionali della f nel punto $(x_0, y_0)^T$ lungo due direzioni (non parallele) $\mathbf{u} = (a, b)^T$ e $\mathbf{v} = (c, d)^T$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = p\,; \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = q\,.$$

Si calcoli il gradiente della funzione f nel punto: $\nabla f(x_0, y_0)$.

(Sol. $(\frac{dp-bq}{ad-bc}, \frac{aq-pc}{ad-bc})^T$.)

Esercizio 11 Sono date le funzioni

$$x(r,s,t) = rse^t\,; \qquad y(r,s,t) = rs^2e^{-t}\,; \qquad z(r,s,t) = r^2s\sin t\,; \qquad u(x,y,z) = x^4y + y^2z^3.$$

Si trovi il valore di $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ quando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

(Sol. 192.)

Esercizio 12 Si trovino il minimo e il massimo assoluti della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

(Sol. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.)

Esercizio 13 Si scriva la matrice Hessiana della funzione

$$f(x,y,z) = z\,\sqrt{1+x^2+y^2};$$

precisando l'insieme su cui è definita.

Sol.

$$\begin{pmatrix} z\frac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{xyz}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ -\frac{xyz}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} & z\frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 14 Si verifichi che la funzione

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

è soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(Questa è l'equazione del calore, che modella la temperatura u di un corpo che scambia calore con l'ambiente; una soluzione dell'equazione data è una funzione $u(x,t)$ che, sostituita all'equazione data, la soddisfa per ogni $(x,t) \in A$, dove A è un opportuno dominio di $\mathbb{R}^2$).

Esercizio 15 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Si verifichi che la funzione f ammette tutte le derivate parziali del primo ordine e che queste sono continue su $\mathbb{R}^2$. Si calcolino poi le derivate seconde nell'origine e si facciano opportune osservazioni alla luce del teorema di Schwarz.

Esercizio 16 Si trovino i punti di massimo e minimo relativo per la funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

(Sol. $(0,0)^T$ punto di sella, $\pm(1,1)^T$ punti di minimo.)

Esercizio 17 Si studino i punti critici della funzione $f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$.

(Sol. $(0,0)^T$ punto di sella; $\pm(1,1)^T$ punti di massimo relativo; $\pm(-1,1)^T$ punti di minimo relativo.)

Esercizio 18 Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (3x - x^3)(3y - y^3);$$

classificandoli come punti di minimo o di massimo relativo o punti di sella. Stabilire se la funzione ammette massimo e/o minimo assoluti.

(Sol. $(0,0)^T$, $\pm(0,\sqrt{3})^T$, $\pm(\sqrt{3},0)^T$, $\pm(\sqrt{3},\pm\sqrt{3})^T$ punti di sella; $\pm(1,1)^T$ punti di massimo relativo, $\pm(-1,1)^T$ punti di minimo relativo.)

Esercizio 19 Si calcoli l'approssimante quadratico (polinomio di Taylor di ordine 2) della funzione

$$f(x,y) = 3\sin(xy) + \log\left(\frac{x}{y}\right)$$

nel punto $(1,\pi)^T$.

(Sol. $P_2(x,y) = -\log(\pi) + (1-3\pi)(x-1) - (3+\frac{1}{\pi})(y-\pi) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3(x-1)(y-\pi) + \frac{1}{2\pi^2}(y-\pi)^2$.)

Esercizio 20 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$; è possibile per f avere 2 punti di massimo relativo e nessun punto di minimo relativo? Si discuta tale questione confrontando con quanto avviene per funzioni in più variabili, considerando e studiando la funzione

$$f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2.$$

(Sol. No, se si considera minimo in senso debole. La cosa non vale più per funzioni definite su $\mathbb{R}^2$. Per la funzione proposta $(1,2)^T$ e $(-1,0)^T$ sono punti di massimo relativo e assoluto; la funzione non ammette nessun punto di minimo relativo.)

Esercizio 21 Uno scatolone a base rettangolare senza coperchio deve contenere un volume di 32000 cm^3. Si trovino le dimensioni (altezza, larghezza e profondità) che minimizzano la quantità di cartone impiegato.

(Sol. 20,40,40.)

Esercizio 22
a) Si provi che esistono massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

nella palla unitaria chiusa $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b) Si osservi che per ogni $(x, y)^T \in D$ si ha $|xy| \leq \frac{1}{2}$.

c) Si determini l'unico punto critico di f nella palla aperta, e si verifichi che non è un punto di estremo.

d) Si concluda che i punti di minimo e di massimo devono avere norma 1.

e) Si calcolino massimo e minimo di f su D.

(Sol. Max $\sin \frac{1}{2}$, min $-\sin \frac{1}{2}$.)

Esercizio 23 Si trovino eventuali punti estremali locali e assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}.$$

(Sol. $(-\frac{1}{2}, 4)^T$ punto di massimo relativo; non vi sono estremi assoluti.)

Esercizio 24 Si studino i punti critici della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz + 5x + y - z + 3.$$

(Sol. $(-6, -4, \frac{7}{2})^T$ punto di minimo relativo.)

Esercizio 25 Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz.$$

(Sol. $(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})^T$ punto di minimo relativo, $(0, 0, 0)^T$ punto di sella.)

Esercizio 26 Sia $f : B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile definita nella palla-aperta di raggio 1 centrata nell'origine. Supponiamo che $||\nabla f(\mathbf{x}|| \leq 1$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, 1)$. Sia inoltre $f(\mathbf{0}) = 0$.

Si dimostri che la funzione f è limitata su $B(\mathbf{0}, 1)$ e che si ha $|f(\mathbf{x})| \leq 1$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, 1)$.

(Sol. $|f(x)| = |f(x) - f(0)| = |\langle \nabla f(\xi), x \rangle| \leq \|\nabla f(\xi)\| \cdot \|x\| \leq 1$.)

Esercizio 27 Si trovino i punti dell'ellissoide

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1;$$

nei quali il piano tangente è parallelo al piano π di equazione

$$3x - y + 3z = 1.$$

(Sol. $\frac{\pm 1}{\sqrt{50}}(-6, 1, -2)^T$.)

Esercizio 28 Si trovino gli estremi della funzione

$$f(x, y) = e^{-xy};$$

nella regione

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

(Sol. Max $e^{\frac{1}{4}}$, min $e^{-\frac{1}{4}}$.)

Esercizio 29 Si trovino i punti della superficie di equazione

$$xy^2z^3 = 2$$

che sono più vicini all'origine.

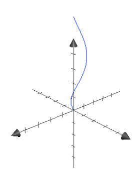
(Sol. $\left(3^{-\frac{1}{4}}, (\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}\right)^T$, $\left(3^{-\frac{1}{4}}, -(\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}\right)^T$, $\left(-3^{-\frac{1}{4}}, (\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}, -3^{\frac{1}{4}}\right)^T$, $\left(-3^{-\frac{1}{4}}, -(\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}, -3^{\frac{1}{4}}\right)^T$.)

Esercizio 30 Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\gamma(t) = \left(\cos t \sin t, \sin^2 t, 2t\right)^T.$$

Si dica se γ è una curva regolare semplice. Si disegni uno schizzo della curva. Si trovino le equazioni del vettore tangente la curva nel punto $\gamma(t)$.

(Sol. È regolare e semplice. $\gamma'(t) = (\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t, 2 \mathrm{sen}\, t \cos t, 2)^T$.)

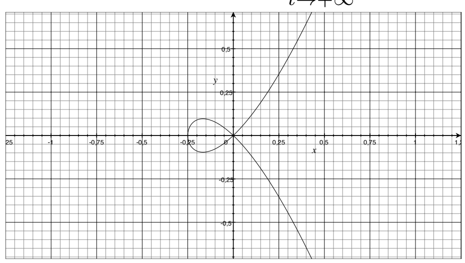


Esercizio 31 Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma(t) = \left(t^2 - t, 2t^3 - 3t^2 + t\right)^T.$$

Si dica se γ è una curva regolare, semplice. Si trovino le equazioni del vettore tangente la curva nel punto $\gamma(t)$. Si trovino i valori del parametro t per i quali la curva è contenuta nel semipiano $x \leq 0$. Si dica se il sostegno dell'arco di curva contenuto in tale semipiano è un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$. Si dica se la curva γ è limitata. Si disegni uno schizzo della curva.

(Sol. È regolare ma non è semplice ($\gamma(0) = \gamma(1)$). $\gamma'(t) = (2t-1, 6t^2-6t+1)^T$. $t \in [0,1]$. Il sostegno dell'arco di curva contenuto nel semipiano $x \leq 0$ è un insieme limitato perché immagine continua di un compatto. La curva non è limitata perché ad esempio $\lim\limits_{t\to+\infty}(t^2-t) = +\infty$.)



Esercizio 32 Si stabilisca che esistono e si calcolino massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2+1}$$

sull'insieme

$$E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x^2 = 0\}.$$

(Sol. Max $\frac{1}{2}$, min $-\frac{1}{2}$.)

Esercizio 33 Si provi che due curve regolari equivalenti hanno versori tangenti con la stessa direzione.

(Sol. Immediato applicando la regola di derivazione della funzione composta.)

Esercizio 34 Si trovino gli estremi della funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; vincolata all'insieme $E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}\} \qquad a \in \mathbb{R}^+$.

(Sol. Punto di massimo $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})^T$, punto di minimo $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})^T$.)

Esercizio 35 Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3 :$$

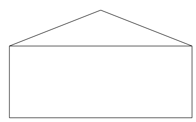
ristretta al triangolo di vertici $(0,0)^T$, $(0,6)^T$, $(6,0)^T$.

(Sol. Max 4, min -64)

Esercizio 36 Si trovino i valori massimo e minimo assoluti per la funzione $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2x + 1$ nel dominio a forma di mezza luna costituito da tutti i punti del disco $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ posti alla sinistra del ramo destro dell'iperbole $x^2-y^2=1$.

(Sol. Min$=1-\sqrt{\frac{32}{27}}$ nel punto $(\sqrt{\frac{2}{3}},0)^T$, Max$=\frac{5+\sqrt{3}}{4}$ nei punti $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^T$.)

Esercizio 37 Si consideri il pentagono in figura, costituito da un triangolo isoscele sovrapposto ad un rettangolo. Il pentagono ha perimetro fisso P. Si trovino le lunghezze dei lati del pentagono che massimizzano l'area.



(Sol. base$=P(2-\sqrt{3})$, altezza$=P\,\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, lato obliquo$=P\,\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$)

Esercizio 38 Si trovino gli estremi della funzione

$$f(x,y,z)=x+2y;$$

vincolata alla curva definita dall'intersezione delle superfici di equazioni:

$$x+y+z=1; \qquad y^2+z^2=4.$$

(Sol. Max $1+2\sqrt{2}$, min $1-2\sqrt{2}$.)

Esercizio 39 Sia $h \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $h(0)=0$, $h'(0)=1$, $h''(0)=2$. Si verifichi che l'equazione

$$h(x)+y^3+y=0$$

definisce implicitamente una funzione $\varphi: U \to V$ in un intorno U di $x=0$, (V essendo un opportuno intorno di $y=0$). Si scriva l'approssimante quadratico di φ nel punto $x=0$.

(Sol. $-x-x^2$.)

Esercizio 40 Si verifichi che l'equazione

$$xy^2+xz-y^3+\operatorname{arctg} z=2$$

definisce implicitamente una funzione $\varphi: U \to V$ in un intorno U di $(x,y)^T=(1,-1)^T$, (V essendo un opportuno intorno di $z=0$). Si calcoli la derivata direzionale della funzione φ nel punto $(1,-1)^T$ nella direzione del versore $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$.

(Sol. $\frac{3}{\sqrt{2}}$.)

Esercizio 41 Si verifichi che l'equazione

$$x \operatorname{sen} x + \log(1+y^2) - z - \int_0^z e^{t^2}\, dt = 0$$

definisce implicitamente un'unica funzione $\varphi : U \to V$ in un intorno U di $(x,y)^T = (0,0)^T$, (V essendo un opportuno intorno di $z = 0$). Si verifichi che $(0,0)^T$ è punto di minimo locale per φ.

(Sol. $\nabla\varphi(0,0) = (0,0)^T$, $d^2\varphi(0,0)(u,v) = u^2 + v^2$.)

Esercizio 42 Sia $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tale che $g(0,0,0) = 0$ e $\nabla g(0,0,0) = (1,2,3)^T$. Si consideri la curva di $\mathbb{R}^3$ ottenuta intersecando la superficie definita dall'equazione

$$g(x,y,z) = 0$$

con il piano di equazione

$$x + y + z = 0.$$

Si provi che la curva ammette una parametrizzazione regolare in un intorno di $(0,0,0)^T$ e si calcoli la direzione del vettore tangente la curva in tale punto.

(Sol. $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^T$.)

Esercizio 43 Si verifichi che

$$\lim_{y\to 0^+} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}}\, \frac{x}{y^2}\, dx \neq \int_0^1 \Big(\lim_{y\to 0^+} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\, \frac{x}{y^2} \Big)\, dx.$$

Si facciano opportune osservazioni alla luce del teorema di inversione del limite con il segno di integrazione.

(Sol. $\frac{1}{2} \neq 0$.)

Esercizio 44 Si verifichi che 0 è punto di minimo relativo per la funzione

$$f(x) = \int_{\cos x}^1 e^{-xy^2}\, dy.$$

(Sol. $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$.)