Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria. Pordenone, 28 maggio 2002

II PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA II ESEMPIO

Dr. Franco Obersnel

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = xe^{-y^2\sqrt{x}-x}.$$

Si trovi il dominio di f. Si stabilisca che f è una funzione limitata sul suo dominio. Si trovino gli estremi di f.

ESERCIZIO N. 2. Si trovino i punti di massimo/minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^3y^3 + x^2 + y^2 - 2xy$$

ristretta all'insieme

$$\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli l'integrale generale dell'equazione lineare

$$x^{vi} + x^{v} + x^{iv} + x^{iii} = t + 2e^t.$$

ESERCIZIO N. 4. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t}\left(\sqrt{t^2 - x^2} + x\right); \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria. Pordenone, 28 maggio 2002

Risultati:

1) Il dominio è il semipiano $x \geq 0$. Si noti che non è aperto. Cerchiamo evenutali estremi all'interno del dominio, cioè per $x > 0$. Le derivate parziali della funzione f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-y^2\sqrt{x}-x}\left(1 - \frac{y^2}{2}\sqrt{x} - x\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-y^2\sqrt{x}-x}(-2y\sqrt{x}).$$

Ponendole uguale a 0 si ottiene dalla seconda $x = 0$ oppure $y = 0$, per cui $y = 0$. La prima equazione ci fornisce allora immediatamente $x = 1$, per cui si ottiene l'unico punto $(1,0)^T$.

Se $x = 0$ la funzione vale 0, e poiché $f(x,y) \geq 0$ su tutto il dominio, si conclude che tutti i punti del tipo $(0,y)$ sono punti di minimo e il minimo è 0. Il punto $(1,0)^T$ è un punto di massimo. Questo si può vedere calcolando (con un po' di fatica) la matrice Hessiana, oppure osservando che $f(x,y) \leq xe^{-x}$ per ogni $(x,y)^T$ appartenente al dominio. Essendo $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ si deduce facilmente che il punto $(1,0)$ deve essere di massimo.

2) Studiamo la situazione all'interno del dominio. Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y) = (3x^2y^3 + 2x - 2y, 3y^3x^2 + 2y - 2x)^T.$$

Per risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)^T$ conviene sommare tra loro le due equazioni in modo da ottenere l'equazione $3x^2y^2(x+y) = 0$, da cui $x = -y$ oppure $xy = 0$. Poiché nell'interno del dominio si ha $x > 0$ e $y > 0$ non vi sono soluzioni. Dunque i punti estremali si trovano sulla frontiera.

Studiamo la situazione sull'arco di cerchio. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, con un calcolo simile a quello appena svolto (si sommino le prime due equazioni del sistema), si ottiene l'unico punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, in cui il valore di f è $\frac{1}{8}$.

Restano da considerare i segmenti lungo gli assi. Qui la funzione vale rispettivamente y^2 e x^2 da cui evidentemente si trovano i punti di minimo in $(0,0)^T$ con valore 0, e i punti di massimo in $(0,1)^T$ e $(1,0)^T$ con valore 1.

Dunque il minimo della funzione è 0 e il massimo è 1.

3) L'equazione caratteristica dell'omogenea ha come radici: 0 di molteplicità 3, -1, $\pm i$. Per trovare la soluzione particolare usiamo il principio di sovrapposizione. Per il termine noto $2e^t$ si considera una soluzione del tipo ae^t, e si ottiene facilmente $a = \frac{1}{2}$. Per il termine noto t, essendo 0 radice dell'equazione caratteristica di molteplicità 3 si deve considerare una soluzione del tipo $t^3(at+b)$. Derivando e sostituendo nell'equazione si ottiene $a = \frac{1}{24}$ e $b = -\frac{1}{6}$. L'integrale generale sarà dunque

$$\lambda_1 + \lambda_2 t + \lambda_3 t^2 + \lambda_4 e^{-t} + \lambda_5 \cos t + \lambda_6 \sin t + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{6}t^3.$$

4) Si può supporre $t > 0$ perché si studia il problema di Cauchy con valore iniziale in $t = 1$. Si ponga $v = \frac{x}{t}$, da cui $x' = v + tv'$. Sostituendo nell'equazione si ottiene l'equazione a variabili separabili

$$v' = \frac{\sqrt{1-v^2}}{t}$$

, che si risolve :

$$\int_1^v \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv = \int_1^t \frac{1}{t}\,dt$$

da cui $\arcsin(v) - \arcsin(1) = \log t$ e $v(t) = \sin(\log t + \frac{\pi}{2})$, da cui $x(t) = t\sin(\log t + \frac{\pi}{2})$.