Esercizi di ANALISI MATEMATICA I
Dott. Franco Obersnel
Anno accademico 2002–2003. Trieste, 30 ottobre 2002

ESERCIZIO N. 1.
a) Si provi, utilizzando la definizione di limite, che

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

b) Si provi, utilizzando la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{n^2+1}{n^2+n-1} = 1.$$

ESERCIZIO N. 2.
Si provi che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \cos(x_0 + x) = \cos(x_0).$$

Si osservi che quanto provato equivale a $\lim\limits_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$.
(Suggerimento: si usi la formula trigonometrica del coseno della somma, si applichi poi il fatto noto che $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$.)

ESERCIZIO N. 3.
Si calcolino i seguenti limiti o si dimostri che non esistono:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\beta x} \quad \text{per} \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0; \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin|x|}{x};$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2(x)(1-\sin x); \qquad \text{d)} \quad \lim_{x\to +\infty} x(1-\sin x).$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(3\operatorname{tg}(4x))}{5x}; \qquad \text{f)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{\cos|x|-1}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si studino i seguenti limiti:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1}{x} + a_0}{\frac{b_m}{x^m} + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \ldots + \frac{b_1}{x} + b_0}$$

al variare di $m, n \in \mathbb{N}$ e $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots b_m \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

$$\text{b)} \quad \lim_{x\to +\infty} x \sin\left(\frac{\pi x + 1}{4x^n - 1}\right) \qquad \text{al variare di } n \in \mathbb{N}$$

SOLUZIONI 1) a) $\sqrt{x} < \varepsilon$ se $0 < x < \delta < \varepsilon^2$.
b) Si deve provare che, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste n_0 tale che per ogni $n > n_0$ si ha $|\frac{n^2+1}{n^2+n-1} - 1| < \varepsilon$. Per $n > 1$ si ha $\frac{n^2+1}{n^2+n-1} \leq 1$, dunque è sufficiente provare che per $n > n_0$ si ha $1 - \varepsilon < \frac{n^2+1}{n^2+n-1}$ che, dopo qualche passaggio, diventa $n^2\varepsilon - n(1-\varepsilon) + (2-\varepsilon) > 0$. Tale disequazione certamente è soddisfatta per tutti gli n se $\varepsilon > 1$, e per tutti gli $n > n_0$ dove n_0 è la maggiore delle due soluzioni dell'equazione, se $\varepsilon \leq 1$.

$$2) \quad \lim_{x\to 0} \cos(x_0 + x) = \lim_{x\to 0} (\cos x_0 \cos x - \sin x_0 \sin x) = \cos x_0 \lim_{x\to 0} \cos x - \sin x_0 \lim_{x\to 0} \sin x = \cos x_0.$$

3) a) $\frac{\alpha}{\beta}$; b) non esiste; c) $\frac{1}{2}$; d) non esiste; e) $\frac{24}{5}$; f) -2.

4) a) 0 se $m > n$, $\frac{a_n}{b_n}$ se $m = n$, ∞ se $m < n$.
b) non esiste se $n = 0$, $+\infty$ se $n = 1$, $\frac{\pi}{4}$ se $n = 2$, 0 se $n > 2$.