Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 9: equazioni differenziali ordinarie.

Esercizio 1. Si classifichino le seguenti equazioni, come ordinarie o alle derivate parziali; si dica se sono lineari, se lineari omogenee e se ne determini l'ordine:

$$a)\quad 2(u-1)u' = 2t+1 \quad ; \quad b)\quad \log\left(\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\right)\frac{dy}{dx} - e^{2x}y = \sin\sqrt{x} \quad ;$$

$$c)\quad xy\langle \nabla u(x,y), (x,y)^T\rangle = 3 \quad ; \quad d)\quad \frac{d}{dx}(xy'(x)) + 2y(x) = f(y) \quad ;$$

$$e)\quad y^{(4)}\sin x + 3y''\cos x + y^{(5)} - g(x) = 0 \quad ; \quad f)\quad \sum_{i=1}^{3} a_i(x)y^{(i)}(x) = 0 \quad .$$

Svolgimento.
L'equazione a) è ordinaria del primo ordine, non è lineare.
L'equazione b) è ordinaria lineare non omogenea del primo ordine.
L'equazione c) è alle derivate parziali, del primo ordine, lineare non omogenea.
L'equazione d) è ordinaria del secondo ordine; è lineare se e solo se la funzione f è lineare, ed è lineare omogenea se e solo se la funzione f è lineare omogenea.
L'equazione e) è ordinaria lineare del quinto ordine; è omogenea se e solo se $g = 0$.
L'equazione f) è ordinaria lineare omogenea del terzo ordine.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

che modella la diffusione dell'energia termica di un filo nel punto x all'istante t.
Si verifichi che la seguente funzione, espressa come serie, è soluzione di tale equazione:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

dove $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una qualunque successione limitata di numeri reali.

Svolgimento.
È sufficiente calcolare le derivate parziali della funzione $u(t,x)$, e sostituirle nell'equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\frac{n\pi}{L};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Esercizio 3. Si risolva l'equazione differenziale

$$u' = 2^u.$$

Svolgimento.
È un'equazione a variabili separate e si può scrivere

$$\frac{du}{2^u} = dx.$$

Integrando a membro a membro si ottiene

$$-\frac{1}{\log 2}2^{-u} = x + C$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante.

Volendo si può scrivere la soluzione in forma esplicita. Sarà

$$u(x) = -\log_2[-\log 2(x + C)]$$

e la soluzione è definita nell'intervallo $]-\infty, -C[$.

Esercizio 4. Si risolva l'equazione differenziale

$$x^2y' + y = 0.$$

Svolgimento.
Per $x \neq 0$ si può scrivere

$$y' = -\frac{y}{x^2}.$$

Questa è un'equazione a variabili separabili e si può scrivere

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}.$$

Integrando a membro a membro si ottiene

$$\log|y| = \frac{1}{x} + C$$

con C costante e quindi

$$y(x) = ke^{\frac{1}{x}}$$

con k costante. In particolare la soluzione $y(x) = 0$ passa per il punto $x = 0$ mentre tutte le altre soluzioni non sono definite per $x = 0$.

Esercizio 5. Si risolva l'equazione

$$y' = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{ye^y}.$$

Svolgimento.
Naturalmente si deve supporre $y \neq 0$. L'equazione si può riscrivere nella forma

$$ye^y dy = x\sqrt{x^2+1}dx.$$

Integrando a membro a membro si ottiene

$$ye^y - e^y = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

e la soluzione in forma implicita è

$$e^y(y-1) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Esercizio 6. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} \\ y(1) = \pi/4 \end{cases}.$$

Svolgimento.

L'equazione proposta è omogenea nelle variabili x e y, conviene allora attuare una sostituzione. Ponendo $u = \frac{y}{x}$ e tenendo conto che $y' = u + xu'$ l'equazione diventa

$$xu' = \tan u$$

che si può riscrivere nella forma

$$\frac{u'}{\tan u} = \frac{1}{x}.$$

Integrando a membro a membro si ottiene

$$\log(\sin u) = \log|x| + C$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante.

La stessa si può riscrivere $\sin\frac{y}{x} = kx$ con $k \in \mathbb{R}$.

Dalla condizione $y(1) = \frac{\pi}{4}$ si ottiene infine $\frac{\sqrt{2}}{2} = k$ da cui

$$y(x) = x \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

Esercizio 7. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xy-y^2}{x^2} \\ y(e) = e \end{cases}.$$

Svolgimento.

L'equazione è omogenea in x e y. Sostituendo $u = \frac{y}{x}$ si ottiene

$$xu' = -u^2$$

che si può riscrivere nella forma $-\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x}$. Integrando a membro a membro si ottiene subito $u(x) = \frac{1}{\log x + C}$ con $C \in \mathbb{R}$ costante. La soluzione sarà $y(x) = \frac{x}{\log x + C}$ e dovendo soddisfare alla condizione $y(e) = e$ deve essere $C = 0$, dunque

$$y(x) = \frac{x}{\log x}.$$

Esercizio 8. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = yx\cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

Svolgimento.

L'equazione è a variabili separabili. Si può scrivere $\frac{dy}{y} = x\cos x\,dx$. Integrando a membro a membro si ottiene $\log|y| = x\sin x + \cos x + C$ da cui $y(x) = ke^{x\sin x + \cos x}$. Imponendo la condizione $y(0) = 2$ si ottiene $k = 2e^{-1}$. Dunque

$$y(x) = 2e^{x\sin x + \cos x - 1}.$$