Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 8: estremi vincolati.

Esercizio 1. Scomporre il numero 411 nella somma di tre numeri positivi in modo che il loro prodotto sia massimo. Dimostrare che detto prodotto è effettivamente un massimo.

Svolgimento.
La condizione richiesta è $411 = x + y + z$ e la funzione da ottimizzare è $f(x, y, z) = xyz$. Il problema è un problema di massimo vincolato. Si noti che senza dubbio possiamo supporre $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$ perché altrimenti il prodotto è uguale a 0 e questo non può essere il valore massimo.

Si può risolvere il problema in diversi modi. Proviamo ad esplicitare il vincolo. Si può scrivere $z = 411 - (x + y)$ ed attuare la sostituzione nell'espressione della funzione f. In questo modo otteniamo la funzione

$$g(x, y) := f(x, y, 411 - (x + y)) = xy(411 - x - y) = 411xy - x^2y - xy^2.$$

Calcoliamo il gradiente

$$\nabla g(x, y) = (411y - 2xy - y^2, 411x - x^2 - 2xy)^T.$$

Cerchiamo i punti in cui il gradiente si annulla. Cioè risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 411y - 2xy - y^2 = 0 \\ 411x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}.$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene $411(y - x) - (y^2 - x^2) = 0$ da cui $x = y$ oppure $x + y = 411$.

La $x + y = 411$ implicherebbe però $z = 0$ (essendo $x + y + z = 411$) e quindi è da scartare. Resta $x = y$ da cui, sostituendo in una delle due equazioni del sistema, $x = y = \frac{411}{3}$. Dall'equazione $x + y + z = 411$ si ricava infine $z = \frac{411}{3}$.

Se un massimo esiste, questo si ottiene quindi per $x = y = z = \frac{411}{3}$.

Vediamo ora come si può risolvere il problema utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

L'equazione del vincolo è $x+y+z = 411$. Posto $\phi(x, y, z) = x+y+z-411$ si ha $\nabla\phi(x, y, z) = (1, 1, 1)^T$. Il gradiente di f è $\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)^T$.

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange consiste nello studiare il sistema

$$\begin{cases} yz + \lambda = 0 \\ xz + \lambda = 0 \\ xy + \lambda = 0 \\ x + y + z = 411 \end{cases}.$$

Osservando come prima che le tre coordinate sono non nulle, sottraendo la terza equazione dalla seconda si ottiene $x(z - y) = 0$ e quindi $z = y$. Sottraendo la seconda dalla prima si ottiene $z(y - x) = 0$ da cui $y = x$. In conclusione, tenendo presente l'equazione del vincolo, si ottiene $x = y = z = \frac{411}{3}$.

Si osservi che il risultato era prevedibile. Il problema è perfettamente simmetrico nelle tre variabili $x,\ y,\ z$. Dunque i tre valori cercati di $x,\ y$ e z devono essere uguali. Dall'equazione del vincolo si ottiene poi $x = y = z = \frac{411}{3}$.

Resta da dimostrare che il punto trovato è proprio un punto di massimo. Poiché stiamo cercando numeri positivi, stiamo studiando la funzione $f(x, y, z) = xyz$ sull'insieme $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 411;\ \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Tale insieme è chiuso essendo l'intersezione di un piano (chiuso) con il primo ottante. Inoltre è limitato perché le coordinate dei punti che appartengono a tale insieme sono limitate dal numero 411. Dunque è compatto e per il teorema di Weierstrass deve ammettere massimo e minimo. Il minimo si ottiene in tutti i punti in cui una coordinata è nulla. Il massimo si ottiene proprio nel nostro punto.

Esercizio 2. Si usi il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare i valori estremi della funzione $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sul circolo unitario di centro l'origine.

Svolgimento.

Il gradiente delle funzione f è $\nabla f(x, y) = \langle 2x, 4y \rangle$. Il gradiente della funzione $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, che definisce il vincolo, è $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)^T$.

Per applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} .$$

Dalla prima equazione si ha che $\lambda = -1$ oppure $x = 0$. Se $x = 0$ allora, dall'equazione del cerchio, si ha $y = 1$ oppure $y = -1$. Se $\lambda = -1$ dalla seconda equazione si ottiene $y = 0$. Otteniamo in definitiva i punti $(0, -1)^T$, $(0, 1)^T$, $(-1, 0)^T$, $(1, 0)^T$.

Calcolando la funzione in tali punti si scopre che il valore massimo è 2, e si ottiene nei punti $(0, -1)^T$ e $(0, 1)^T$; il valore minimo è 1 e si ottiene nei punti $(-1, 0)^T$ e $(1, 0)^T$.

Naturalmente il problema si poteva risolvere in modo molto semplice parametrizzando il circolo con $x = \cos t$ e $y = \sin t$ e trovando gli zeri della derivata della funzione $f(\cos t, \sin t) = \cos^2 + 2\sin^2 t = 1 + \sin^2 t$.

Esercizio 3. Si consideri l'ellissoide d'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Per ogni punto $(x_0, y_0, z_0)^T$ appartenente all'ellissoide si consideri il piano $\pi(x_0, y_0, z_0)$ tangente l'ellissoide nel punto $(x_0, y_0, z_0)^T$. Si indichino con $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_0, y_0, z_0)$ e $C(x_0, y_0, z_0)$ rispettivamente i punti di intersezione di $\pi(x_0, y_0, z_0)$ con l'asse delle x, con l'asse delle y e con l'asse delle z (questi non saranno definiti soltanto nel caso in cui il piano risulti parallelo ad un asse).

Definiamo la seguente funzione

$$f(x_0, y_0, z_0) = A(x_0, y_0, z_0) + B(x_0, y_0, z_0) + C(x_0, y_0, z_0).$$

Si trovi il punto $(x, y, z)^T$ appartenente all'ellisse, di coordinate tutte positive (cioè $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) che rende minima la funzione f.

Svolgimento.

L'equazione del piano $\pi(x_0, y_0, z_0)$ si può ottenere dalla formula

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\,(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\,(x - x_0) = 0;$$

che nel nostro caso diventa

$$\frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) = 0.$$

Per calcolare l'intercetta del piano con l'asse delle x, poniamo $y = 0$ e $z = 0$ nell'equazione del piano. Si ottiene

$$A(x_0, y_0, z_0) = \frac{a^2}{2x_0}\left(\frac{2x_0^2}{a^2} + \frac{2y_0^2}{b^2} + \frac{2z_0^2}{c^2}\right) = \frac{a^2}{x_0},$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che il punto $(x_0, y_0, z_0)^T$ appartiene all'ellissoide.

In modo simile si trovano $B(x_0, y_0, z_0) = \frac{b^2}{y_0}$ e $C(x_0, y_0, z_0) = \frac{c^2}{z_0}$.

Abbiamo ricondotto il problema al calcolo del minimo della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}$$

vincolata all'ellissoide.

Applicheremo il teorema di Lagrange.

Il gradiente della funzione f è

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{a^2}{x^2}, -\frac{b^2}{y^2}, -\frac{c^2}{z^2}\right)^T$$

mentre il gradiente della funzione che definisce il vincolo è

$$\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)^T.$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -\frac{a^2}{x^2} + \lambda\frac{x}{a^2} = 0 \\ -\frac{b^2}{y^2} + \lambda\frac{y}{b^2} = 0 \\ -\frac{c^2}{z^2} + \lambda\frac{z}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}.$$

Risolvendo la prima equazione si ottiene $x^3 = \frac{a^4}{\lambda}$, e in modo simile, $y^3 = \frac{b^4}{\lambda}$ e $z^3 = \frac{c^4}{\lambda}$. Sostituendo questi valori nell'equazione dell'ellissoide si trova dopo pochi calcoli

$$\lambda^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}.$$

Sostituendo tale valore nelle espressioni per x, y, z si ottiene il punto di minimo

$$\left(\frac{a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}}, \frac{b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}}, \frac{c^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}}\right).$$

Esercizio 4. Si calcolino i valori massimo e minimo della funzione $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$ definita sul compatto $K = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$ (si tratta della porzione del paraboloide solido di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$ contenuta nel semispazio $z \geq 0$).

Svolgimento.

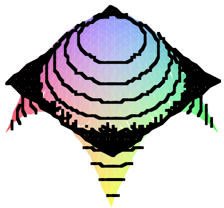
Il minimo e il massimo della funzione assegnata devono esistere per il teorema di Weierstrass. I punti di massimo e minimo possono trovarsi nell'interno di K oppure sulla frontiera.

Studiamo dapprima la situazione nell'interno di K. Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)^T$$

e si annulla soltanto nel punto $(0,0,0)^T$ che però non è interno a K. Dunque i punti di estremo devono appartenere alla frontiera di K.

La frontiera di K è costituita dall'unione della superficie $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon z = 1 - x^2 - y^2,\ 0 < z \leq 1\}$ e il disco $\{(x,y,0)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \leq 1\}$.



Cerchiamo eventuali punti sul paraboloide $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ 0 < z \leq 1\}$. Possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

L'equazione del vincolo è $x^2 + y^2 + z - 1 = 0$. Sia $x^2 + y^2 + z - 1 = \phi(x,y,z)$. Calcoliamo

$$\nabla\phi(x,y,z) = (2x, 2y, 1)^T\,; \qquad \nabla f(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)^T\,.$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + \lambda 2x = 0, \\ 4y + \lambda 2y = 0, \\ 6z + \lambda = 0, \\ x^2 + y^2 + z = 1, \quad z > 0. \end{cases}$$

Si ricava facilmente $x(1+\lambda) = 0$, $\;y(2+\lambda) = 0$, $\;z = -\frac{\lambda}{6}$.

Deve essere $x = 0$ oppure $\lambda = -1$; inoltre $y = 0$ oppure $\lambda = -2$. Perciò una almeno delle due variabili x e y deve annullarsi.

Sia $x = 0$. Può essere $y = 0$ nel qual caso dalla quarta equazione si ottiene $z = 1$ (accettabile perché > 0). Abbiamo pertanto il primo punto: $(0,0,1)^T$. Supponiamo ora $y \neq 0$. Allora è $\lambda = -2$ e $z = \frac{1}{3}$ (accettabile perché > 0). Dalla quarta equazione si ottiene $y^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Abbiamo due ulteriori punti: $(0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3})^T$.

Supponiamo ora $y = 0$ e $x \neq 0$. Si ha $\lambda = -1$ e quindi $z = \frac{1}{6}$ (accettabile perché > 0). Si ottiene $x^2 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Otteniamo i due punti $(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \frac{1}{6})^T$.

Si poteva anche esplicitare il vincolo, senza ricorrere ai moltiplicatori di Lagrange, nel modo seguente.

Sul paraboloide si ha $z = 1 - x^2 - y^2$ e si può studiare la funzione in due variabili ottenuta dalla f operando la sostituzione su z: poniamo

$$g(x,y) := f(x,y,1-x^2-y^2) = x^2 + 2y^2 + 3(1-x^2-y^2)^2 = 3(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) - 5x^2 - 4y^2 + 3.$$

Calcoliamo il gradiente:

$$\nabla g(x,y) = \left(12x^3 - 10x + 12xy^2, 12y^3 - 8y + 12x^2y\right)^T\,.$$

Affinché il gradiente si annulli deve essere soddisfatto il sistema

$$\begin{cases} 12x^3 - 10x + 12xy^2 = 0 \\ 12y^3 - 8y + 12x^2y = 0 \end{cases},$$

che si può riscrivere come segue

$$\begin{cases} 2x(x^2 - 5 + 6y^2) = 0 \\ 2y(y^2 - 4 + 6x^2) = 0 \end{cases}.$$

Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ il sistema equivale a

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = 5 \\ x^2 + 6y^2 = 4 \end{cases},$$

e quindi non ammette soluzioni.

Dunque deve essere $x = 0$ oppure $y = 0$.

Se $x = 0$ si deve avere $y = 0$ oppure $12y^2 - 8 = 0$ cioè $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Se $y = 0$ si deve avere $x = 0$ oppure $12x^2 - 10 = 0$ cioè $x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$.

Ricordiamo che stiamo studiando i punti $(x, y, z)^T$ tali che $z = 1 - x^2 - y^2$, $0 < z \leq 1$. Otteniamo i punti $(0, 0)^T$, $(-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0)^T$, $(\sqrt{\frac{5}{6}}, 0)^T$, $(0, -\sqrt{\frac{2}{3}})^T$, $(0, \sqrt{\frac{2}{3}})^T$. Nell'insieme K questi punti diventano $(0, 0, 1)^T$, $(-\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \frac{1}{6})^T$, $(\sqrt{\frac{5}{6}}, 0, \frac{1}{6})^T$, $(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3})^T$, $(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3})^T$ e i valori della funzione sono rispettivamente 3, $\frac{11}{12}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{17}{12}$.

Resta da controllare cosa succede sul "tappo" inferiore del nostro solido, cioè sul disco chiuso $\{(x, y, 0)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Nel disco aperto si può considerare la restrizione della funzione f al disco: $g(x, y) := f(x, y, 0)$. Si vede subito che l'unico punto di annullamento del gradiente $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)^T$ è l'origine . In tale punto la funzione f vale 0.

Restano da studiare i punti appartenenti alla circonferenza $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$. Questi punti si possono parametrizzare come $x = \cos\vartheta$, $\ y = \sin\vartheta$, $\ z = 0$. La funzione f ristretta alla circonferenza si può scrivere come $k(\vartheta) := f(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0) = 1 + \sin^2\vartheta$. Si calcola $k'(\vartheta) = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$. I punti di annullamento si ottengono per $\vartheta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}\}$. Questi punti corrispondono a $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(-1, 0, 0)^T$, $(0, -1, 0)^T$ rispettivamente e i valori della funzione sono $1,\ 2,\ 1,\ 2$ rispettivamente.

Si può a questo punto concludere: il punto di massimo è il punto $(0, 0, 1)^T$ e il valore massimo è 3. Il punto di minimo è il punto $(0, 0, 0)^T$ e il valore minimo è 0.