Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 7: funzioni a valori vettoriali; funzioni definite implicitamente.

Esercizio 1. Si calcoli il differenziale nel punto $(x, y, z, w)^T$ della funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dove $f = (f_1, f_2, f_3)^T$, $f_1(x, y, z, w) = xyz, f_2(x, y, z, w) = 2x^2y^2w, f_3(x, y, z, w) = \sin(xzw)$.

Svolgimento.
Il differenziale nel punto $(x, y, z, w)^T$ è un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e può essere rappresentata in forma matriciale mediante la matrice Jacobiana, che sarà una matrice a tre righe e quattro colonne. Per scrivere la matrice calcoliamo le derivate parziali che interessano:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = yz; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = xz; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = xy; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial w} = 0;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 4xy^2w; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 4x^2yw; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial w} = 2x^2y^2;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = zw\cos(xzw); \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial f_3}{\partial z} = xw\cos(xzw); \qquad \frac{\partial f_3}{\partial w} = xz\cos(xzw);$$

La matrice Jacobiana sarà quindi

$$J(f)(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy & 0 \\ 4xy^2w & 4x^2yw & 0 & 2x^2y^2 \\ zw\cos(xzw) & 0 & xw\cos(xzw) & xz\cos(xzw) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si calcoli la derivata direzionale nel punto $(1, 1, 1)^T$ lungo la direzione del vettore $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$ della funzione $f = (f_1, f_2)^T$; $\quad f_1(x, y, z) = x^2y\log(xz)$; $\quad f_2(x, y, z) = \frac{y}{x}e^{xyz}$.

Svolgimento.
Il versore di direzione $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$ si ottiene normalizzando il vettore $\mathbf{v}$: $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)^T$. La funzione f è differenziabile nel punto $(1, 1, 1)^T$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ si può allora calcolare usando la formula

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J(f)(1, 1, 1)[\mathbf{v}].$$

La matrice Jacobiana è

$$J(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy\log(xz) + xy & x^2\log(xz) & \frac{x^2y}{z} \\ \frac{y}{x}e^{xyz}(-\frac{1}{x} + yz) & e^{xyz}(\frac{1}{x} + yz) & y^2e^{xyz} \end{pmatrix},$$

che, calcolata nel punto $(1, 1, 1)^T$ diventa

$$J(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2e & e \end{pmatrix}.$$

Perciò la derivata direzionale cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3), \frac{1}{\sqrt{14}}(0 \cdot 1 + 2e \cdot 2 + e \cdot 3)\right)^T = \frac{1}{\sqrt{14}}(4, 7e)^T.$$

Esercizio 3. Sia $f(x, y) = xe^y$. Si calcoli la rapidità in cui la funzione f varia nel punto $(2, 1)^T$ se ci muoviamo verso il punto $(1, 2)^T$. In quale direzione ci dobbiamo muovere affinché la variazione della funzione f sia più rapida?

Svolgimento.

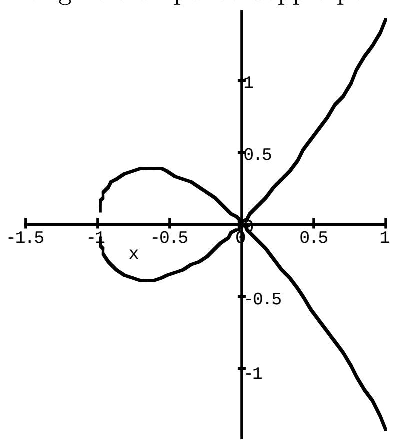
Il versore che rappresenta la direzione dal punto $(2,1)^T$ al punto $(1,2)^T$ è $\mathbf{v} = \dfrac{(1-2, 2-1)^T}{||(1-2,2-1)^T||} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$. La rapidità della variazione di f nel punto $(2,1)^T$ lungo la direzione di $\mathbf{v}$ è la derivata direzionale $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2,1) = \langle \nabla f(2,1), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\rangle$. Il gradiente della funzione f è $\nabla f(x,y) = (e^y, xe^y)^T$; calcolato nel punto $(2,1)^T$ è $\nabla f(2,1) = (e, 2e)^T$. Si ottiene dunque $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2,1) = \dfrac{e}{\sqrt{2}}$.

La direzione in cui avviene la variazione più rapida è quella del gradiente, cioè la direzione del vettore $(e,2e)^T$, o, se si preferisce, del versore $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T$.

Esercizio 4. Si consideri la curva piana definita dall'equazione $x^3 + x^2 - y^2 = 0$. Si stabilisca se esiste una funzione implicitamente definita dall'equazione in un intorno opportuno di ciascun punto della curva. Si calcoli la derivata di tale funzione.

Svolgimento.

Per poter applicare il teorema di U. Dini in un punto $(x_0, y_0)^T$ appartenente alla curva dobbiamo controllare che una delle due derivate parziali sia continua e non nulla nel punto. Il gradiente della funzione $F(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$ è $\nabla F(x,y) = (3x^2 + 2x, -2y)^T$, e si annulla nei punti $(0,0)^T$ e $(-\frac{2}{3}, 0)^T$. Il secondo punto non appartiene alla curva mentre l'origine vi appartiene. Si può allora concludere che in tutti i punti della curva diversi dal punto $(0,0)^T$ si può ottenere la funzione implicitamente definita dall'equazione; questa sarà del tipo $y(x)$ oppure $x(y)$ a seconda dei casi (la prima è definita in tutti i punti della curva in cui $y \neq 0$, la seconda in tutti i punti della curva in cui $3x^2 + 2x \neq 0$). Nell'origine la funzione implicita non è definita. Si noti che l'origine è un punto doppio per la curva (cioè la curva interseca se stessa, vedi figura).



Per calcolare la derivata si può usare la formula di derivazione della funzione implicita:

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}$$

oppure, se esprimiamo la x come funzione di y,

$$x'(y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x(y), y)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x(y), y)} = \frac{2y}{3x(y)^2 + 2x(y)}.$$

La derivata della funzione implicita si può anche ottenere, in alcuni casi, direttamente dall'equazione $x^3 + x^2 - y^2 = 0$. Derivando i due membri rispetto a x e considerando la y come funzione di x si ha

$$3x^2 + 2x - 2y \cdot y' = 0;$$

da cui

$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

In modo simile si può ottenere la derivata di x rispetto a y.

È facile in questo esempio trovare esplicitamente l'espressione della funzione implicita. Ad esempio, se il punto $(x_0, y_0)^T$ è tale che $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, si avrà $y(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$. Si noti che

$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 + x^2}} = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}$$

come previsto.

Esercizio 5. Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(A)$ e si supponga che il punto $(x_0, y_0, z_0)^T$ appartenga alla superficie di equazione $F(x, y, z) = 0$ e la matrice Jacobiana della funzione F nel punto $(x_0, y_0, z_0)^T$ abbia rango massimo in modo tale che sia possibile definire la funzione $z(x, y)$ implicitamente definita dall'equazione $F(x, y, z) = 0$.

Si ricavino le espressioni delle derivate seconde di $z(x, y)$ rispetto a x e y.

Svolgimento. Dalla formula per le derivate delle funzioni implicite si ottengono

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}.$$

Derivando la prima equazione rispetto a x, e facendo attenzione alla derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{-\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\dfrac{\partial F}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Sostituendo nell'ultima equazione l'espressione della $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ si ottiene

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^3}.$$

Le espressioni di $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y)$ si ottengono in modo simile.

Esercizio 6. Si studi, utilizzando i teoremi sulle funzioni implicitamente definite da essa, la curva piana di equazione
$$e^{xy} + x - y - 1 = 0.$$

Svolgimento.
Il gradiente della funzione $F(x,y) = e^{xy} + x - y - 1$ è
$$\nabla F(x,y) = (ye^{xy} + 1, xe^{xy} - 1)^T.$$

Osserviamo che il gradiente non si annulla in alcun punto del piano. Infatti, se x e y sono tali che $ye^{xy}+1 = 0$ e $xe^{xy} - 1 = 0$, posto $t = e^{xy}$, deve essere $y = -\frac{1}{t}$ e $x = \frac{1}{t}$. Il punto $(\frac{1}{t}, -\frac{1}{t})^T$ non può però appartenere alla curva, infatti, se così fosse, avremmo
$$t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} - 1 = 0;$$
mentre l'equazione $t^2 + 2 - t = 0$ non ammette soluzioni reali.

Dunque esiste una funzione implicitamente definita in ogni punto della curva.

Osserviamo che l'origine appartiene alla curva ed è l'unico punto in cui la curva interseca gli assi cartesiani; infatti, se $x = 0$ si deve avere $1 - y - 1 = 0$ e quindi $y = 0$. Analogamente se $y = 0$ si ha $1 + x - 1 = 0$ e quindi $x = 0$.

Il punto $(0,0)^T$ è regolare per la F. Consideriamo la funzione implicita definita in un suo intorno: $y(x)$. La derivata è data dalla formula
$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = -\frac{ye^{xy} + 1}{xe^{xy} - 1}.$$

Nell'origine la derivata vale 1 e dunque la funzione $y(x)$ è crescente in $x = 0$.

Per studiare la concavità della funzione $y(x)$ nell'origine calcoliamo la derivata seconda:
$$y''(x) = -\frac{(y'e^{xy} + ye^{xy}(y + xy'))\ (xe^{xy} - 1) - (ye^{xy} + 1)\ (e^{xy} + xe^{xy}(y + xy'))}{(xe^{xy} - 1)^2};$$
che, calcolata nel punto $(0,0)^T$, dà $2 > 0$. Dunque la funzione è convessa nel punto.

Per studiare l'andamento della curva cerchiamo gli eventuali punti in cui la tangente è verticale o orizzontale. Questi si trovano imponendo rispettivamente
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Cerchiamo eventuali soluzioni dell'equazione $xe^{xy} - 1 = 0$.

Si può chiaramente supporre $x > 0$, e quindi scrivere $e^{xy} = \frac{1}{x}$, cioè $y = \frac{-\log x}{x}$.

Poiché il punto deve appartenere alla curva, sostituiamo il valore di y trovato nell'equazione $e^{xy} + x - y - 1 = 0$. Otteniamo
$$\frac{1}{x} + x + \frac{\log x}{x} - 1 = 0,$$
che è equivalente alla
$$x^2 - x + 1 + \log x = 0.$$

La funzione $h(x) = x^2 - x + 1 + \log x$ è crescente per $x > 0$, come si osserva calcolando la derivata $h'(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x} > 0$ per ogni $x > 0$. Inoltre $h(\frac{1}{3}) = \frac{7}{9} - \log 3 < 0$ mentre $h(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \log 2 > 0$. Dunque esiste un unico numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $h(\alpha) = 0$, ed è $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

Perciò nel punto $(\alpha, \frac{-\log\alpha}{\alpha})^T$ la curva ammette tangente verticale.

In modo simile si può risolvere l'equazione $ye^{xy}+1=0$. Si ottiene un'unico punto del tipo $\left(\frac{\log(-\frac{1}{\beta})}{\beta}, \beta\right)^T$, con $\beta < 0$.

Si potrebbe affinare la nostra indagine studiando la derivata seconda in tali punti. Si potrebbe anche calcolare le derivate successive della funzione implicita, ad esempio in $(0,0)^T$, e scrivere il polinomio di Taylor-McLaurin della funzione implicita in un intorno dell'origine.

Presentiamo il grafico della curva in un intorno dell'origine.