Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 6: Massimi e minimi liberi. Forme quadratiche.

Esercizio 1. Determinare gli estremi della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 3 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases} .$$

Svolgimento.
Si osservi che per $(x,y)^T \neq (0,0)^T$ si ha

$$|f(x,y)| = |\frac{xy}{x^2+y^2}| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

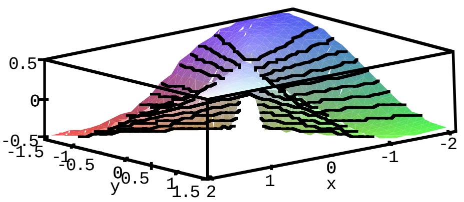
La funzione f è dunque limitata in $\mathbb{R}^2$. Essendo $f(0,0) = 3$ l'origine è punto di massimo ed il valore massimo è 3.

Calcoliamo il gradiente della funzione f nei punti $(x,y)^T \neq (0,0)^T$. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right)^T .$$

Il gradiente si annulla in tutti i punti del tipo $(x,x)^T$ e $(x,-x)^T$, con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha $f(x,x) = \frac{1}{2}$ e $f(x,-x) = -\frac{1}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I punti $(x,-x)^T$ sono dunque punti di minimo ed il valore minimo è $-\frac{1}{2}$.

Il grafico di f in un intorno di (0,0)



Esercizio 2. Uno scatolone a base rettangolare senza coperchio deve contenere un volume di 32000 cm^3. Si trovino le dimensioni (altezza, larghezza e profondità) che minimizzano la quantità di cartone impiegato.

Svolgimento.
Dette x, y, z la lunghezza, la profondità e l'altezza dello scatolone misurate in centimetri, la formula che definisce il volume dello scatolone è $V = xyz$. La quantità di cartone impiegato si ottiene misurando l'area della superficie dello scatolone; questa sarà $A = xy + 2xz + 2yz$. Noi vogliamo trovare il minimo di A e siamo vincolati dalla condizione $V = 32000$. Non è però necessario ricorrere ai teoremi sugli estremi vincolati. Infatti dall'equazione $xyz = 32000$ e considerando che una lunghezza non può essere nulla, si può scrivere $z = \frac{32000}{xy}$ e attuare la sostituzione nella formula di A. Si ottiene una funzione $A(x,y) = xy + 64000\frac{(x+y)}{xy} = xy + 64000(\frac{1}{y} + \frac{1}{x})$, definita per $x > 0,\ y > 0$. Cercheremo dunque il minimo, se esiste, di $A(x,y)$.

Calcoliamo il gradiente di A:

$$\nabla A(x,y) = \left(y - \frac{64000}{x^2}, x - \frac{64000}{y^2} \right)^T .$$

Il gradiente si annulla se e solo se $64000 = x^2y = xy^2$ dunque se e solo se $x = y = \sqrt[3]{64000} = 40$.

Perciò le misure che minimizzano la quantità di cartone impiegato sono $x = y = 40$cm e $z = \frac{32000}{1600} = 20$cm.

Il fatto che $x = y$ era prevedibile per ragioni di simmetria.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$; è possibile per f avere 2 punti di massimo relativo e nessun punto di minimo relativo? Si discuta tale questione confrontando con quanto avviene per funzioni in più variabili, considerando e studiando la funzione $f(x, y) = -(x^2-1)^2-(x^2y-x-1)^2$.

Svolgimento.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che x_1 e x_2 siano due punti di massimo relativo per f. Senza perdita di generalità possiamo supporre $x_1 < x_2$. L'intervallo $[x_1, x_2]$ è compatto e quindi per il teorema di Weierstrass, la funzione f ristretta a $[x_1, x_2]$ deve ammettere minimo. Sia x_3 un punto di minimo per questa funzione. Se $x_1 < x_3 < x_2$ tale punto è di minimo relativo anche per la funzione f. D'altra parte x_3 non può coincidere con uno degli estremi x_1 oppure x_2. Infatti, essendo tali punti di massimo relativo per la f la funzione f assume valori minori di $f(x_1)$ (rispettivamente minori di $f(x_2)$) in un loro intorno.

Consideriamo ora la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ proposta dal problema. Calcoliamo il gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \left(-2(x^2 - 1) \cdot 2x - 2(x^2y - x - 1) \cdot (2xy - 1), -2(x^2y - x - 1) \cdot x^2\right)^T .$$

Affinché il gradiente si annulli nel punto $(x, y)^T$ deve essere, studiando la seconda componente, $x = 0$ oppure $x^2y - x - 1 = 0$, cioè $y = \frac{1+x}{x^2}$.

Studiamo dapprima il caso $x = 0$. La prima componente diventa $-2 \cdot (-1) \cdot (-1) = -2 \neq 0$.

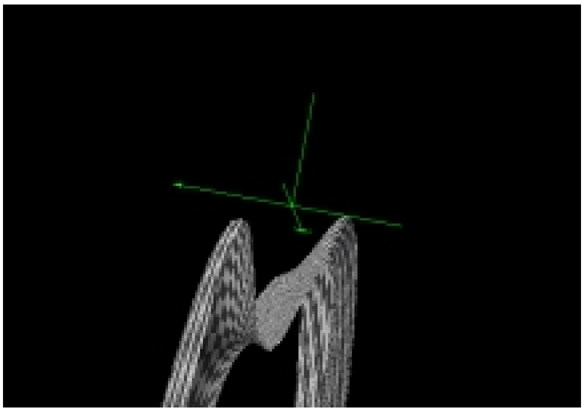
Studiamo ora il caso $x \neq 0$ e $y = \frac{1+x}{x^2}$. La prima componente diventa allora $-4x \cdot (x^2 - 1)$, e si annulla se e solo se $x = 1$ oppure $x = -1$.

Otteniamo allora i punti $(-1, 0)^T$ e $(1, 2)^T$.

Si noti che è sempre $f(x, y) \leq 0$. Poiché $f(-1, 0) = f(1, 2) = 0$ si ha che tali punti sono punti di massimo relativo (e assoluto) per la funzione f. La funzione f inoltre non presenta alcun punto di minimo.

La situazione perciò è ben diversa dal caso delle funzioni in una sola variabile.

La figura seguente mostra il grafico di f in un intorno dei punti di massimo.



Esercizio 4. Si provi il criterio sul segno del differenziale secondo per i punti di minimo e di massimo di una funzione:

"Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(A)$ e sia $\mathbf{x^0} \in A$ un punto critico per la f (cioè $\nabla f(\mathbf{x^0}) = \mathbf{0}$). Allora,

se $d^2f(\mathbf{x^0})$ è una forma quadratica definita positiva, il punto $\mathbf{x^0}$ è un punto di minimo relativo per la f,

se $d^2f(\mathbf{x^0})$ è una forma quadratica definita negativa, il punto $\mathbf{x^0}$ è un punto di massimo relativo per la f."

Svolgimento.

Per ipotesi si ha $d^2f(\mathbf{x_0})(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$ per ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Per la continuità del differenziale secondo su A si ha anche $d^2f(\xi)(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$ per ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ purché $||\mathbf{x^0} - \xi|| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ opportuno, e $B(\mathbf{x^0}, \varepsilon) \subseteq A$.

Sia dunque $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x^0}, \varepsilon)$. Applicando la formula di Taylor di ordine 2 con il resto nella forma di Lagrange, osservando che $df(\mathbf{x^0})(\mathbf{x} - \mathbf{x^0}) = 0$ per ipotesi, si ottiene

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0}) = d^2f(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{x^0}, \mathbf{x} - \mathbf{x^0}) > 0.$$

Si è dunque provato che per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x^0}, \varepsilon)$ si ha $f(\mathbf{x^0}) < f(\mathbf{x})$, cioè $\mathbf{x^0}$ è un punto di minimo relativo per la f.

In modo analogo si prova il risultato per i punti di massimo relativo.

Esercizio 5. Si trovino i punti di massimo e minimo relativo per la funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Svolgimento.

Calcoliamo il gradiente della funzione f:

$$\nabla f(x, y) = \left(4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x\right)^T .$$

Il gradiente si annulla nei punti $(0, 0)^T$, $(-1, -1)^T$ e $(1, 1)^T$. Per capire quali di questi sono punti di minimo o massimo calcoliamo la matrice Hessiana:

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Calcolandola nei punti critici di f si ottiene

$$H(f)(-1, -1) = H(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \quad ; \quad H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché le forme quadratiche $H(f)(-1, -1)$ e $H(f)(1, 1)$ sono definite positive, i punti $(-1, -1)^T$ e $(1, 1)^T$ sono punti di minimo relativo per la funzione. Il punto $(0, 0)^T$ invece non è né di minimo, né di massimo per f perché la forma quadratica $H(0, 0)$ è indefinita. Il punto $(0, 0)^T$ è un punto di sella.