Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 5: Formula di Taylor.

Esercizio 1. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x,y) = e^{xy}$, dapprima centrato nell'origine e poi centrato nel punto $(1,0)^T$.

Svolgimento.
La formula del polinomio di Taylor di grado 3 si può scrivere come segue:

$$T_f^3(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)\left((x-x_0,y-y_0),(x-x_0,y-y_0)\right) +$$

$$+\frac{1}{3!}d^3f(x_0,y_0)\left((x-x_0,y-y_0),(x-x_0,y-y_0),(x-x_0,y-y_0)\right);$$

dove i differenziali sono così definiti:

$$df(x_0,y_0)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2;$$

$$d^2f(x_0,y_0)\left((v_1,v_2),(v_1,v_2)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)v_1v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)v_2^2;$$

$$d^3f(x_0,y_0)\left((v_1,v_2),(v_1,v_2),(v_1,v_2)\right) =$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)v_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0)v_1^2v_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_0,y_0)v_1v_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)v_2^3.$$

Calcoliamo le derivate successive della funzione f:

$$f(x,y) = e^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2e^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2e^{xy};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = y^3e^{xy} \quad ; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y) = 2ye^{xy} + xy^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(x,y) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}; \quad ; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = x^3e^{xy}.$$

Per calcolare lo sviluppo di Taylor nel punto $(0,0)^T$ le derivate vanno calcolate nel punto $(0,0)^T$; si ottiene

$$f(0,0) = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1 \quad ;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = 0.$$

Il polinomio cercato è dunque il seguente:

$$T_f^3(x,y) = 1 + 0 + \frac{1}{2}2(x-0)(y-0) + 0 = 1 + xy.$$

Si noti che in questo caso si poteva procedere in modo molto più semplice.

Ricordando lo sviluppo di Taylor di centro 0 per la funzione reale (in una sola variabile reale)

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots,$$

posto $t = xy$ si può scrivere

$$e^{xy} = 1 + xy + \frac{1}{2}x^2y^2 + \dots,$$

da cui si ricavava immediatamente $T_f^3(x,y) = T_f^2(x,y) = 1 + xy$.

Per calolare lo sviluppo di Taylor nel punto $(1,0)^T$ le derivate vanno calcolate nel punto $(1,0)^T$; si ottiene

$$f(1,0) = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 1 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \quad ;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(1,0) = 2 \quad ; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,0) = 1.$$

Il polinomio cercato è dunque il seguente:

$$T_f^3(x,y) = 1 + (0\cdot(x-1) + (y-0)) + \frac{1}{2}\left(0\cdot(x-1)^2 + 2(x-1)(y-0) + (y-0)^2\right) +$$
$$+\frac{1}{3!}\left(0\cdot(x-1)^2 + 6(x-1)y^2 + 0\cdot(x-1)^2y + y^3\right) = 1 + xy - \frac{1}{2}y^2 + xy^2 + \frac{1}{6}y^3.$$

Esercizio 2. Si scriva lo sviluppo di Taylor di ordine 4 della funzione $f(x,y) = e^y \log(1+x)$ centrato nell'origine.

Svolgimento.

In questo caso non è necessario calcolare tutti i differenziali successivi. Infatti, ricordando gli sviluppi delle funzioni in una variabile:

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad ;$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \dots;$$

si otterrà

$$f(x,y) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right)\cdot\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \dots\right);$$

dunque

$$T_f^4(x,y) = x + xy - \frac{x^2}{2} + \frac{xy^2}{2} - \frac{x^2y}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3y}{3} - \frac{x^2y^2}{4} + \frac{xy^3}{6}.$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile omogenea, cioè tale che $f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ (in particolare $f(\mathbf{0}) = 0$).

Si provi che $f(\mathbf{x}) = df(\mathbf{0})(\mathbf{x})$.

Svolgimento.

Applicando la formula di Taylor (di ordine 1) con il resto nella forma di Lagrange alla funzione f si ha

$$f(\mathbf{x}) = df(\xi)(\mathbf{x});$$

dove ξ è un punto di $\mathbb{R}^N$ che si trova sul segmento congiungente l'origine con $\mathbf{x}$.

Analogamente, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(t\mathbf{x}) = df(\xi(t))(t\mathbf{x});$$

dove $\xi(t)$ è un punto di $\mathbb{R}^N$ che si trova sul segmento congiungente l'origine con $t\mathbf{x}$.

Per ipotesi $f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$; inoltre, poiché il differenziale è un'applicazione lineare, $df(\xi(t))(t\mathbf{x}) = t\,df(\xi(t))(\mathbf{x})$. Si ha allora

$$t\,f(\mathbf{x}) = t\,df(\xi)(\mathbf{x}) \quad \text{e}$$
$$t\,f(\mathbf{x}) = f(t\mathbf{x}) = df(\xi(t))(t\mathbf{x}) = t\,df(\xi(t))(\mathbf{x});$$

pertanto

$$df(\xi)(\mathbf{x}) = df(\xi(t))(\mathbf{x})$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

In particolare, essendo $\xi(0) = \mathbf{0}$, si ha $df(\xi)(\mathbf{x}) = df(\mathbf{0})(\mathbf{x})$ e si ottiene quindi

$$f(\mathbf{x}) = df(\mathbf{0})(\mathbf{x});$$

come si voleva dimostrare.