**Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.**
**Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3**
**Dott. Franco Obersnel**

*Lezione 4: Regole di derivazione e differenziazione.*

**Esercizio 1.** Sia $B \subset \mathbb{R}^N$ una sfera (aperta) di centro $x_0$ e raggio $R$ in $\mathbb{R}^N$. Sia $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione e si supponga che tutte le derivate parziali di $f$ esistano e siano nulle in $B$. Si provi che allora $f$ è una funzione costante.

*Svolgimento.*
Per ipotesi tutte le derivate parziali della funzione sono nulle, in particolare sono funzioni continue e quindi, per il teorema del differenziale totale, la funzione $f$ è differenziabile. Inoltre il differenziale della funzione $f$ è nullo su tutto $B$.

Sia $x \in B$ un punto arbitrario. Sia $\varphi(t) = x_0 + t(x - x_0)$ con $t \in [0,1]$ una parametrizzazione del segmento che congiunge il punto $x$ con il punto $x_0$. Consideriamo la funzione composta $g(t) := f(\varphi(t))$. Per il teorema sul differenziale della funzione composta si avrà $g'(t) = \langle df(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle = 0$. Ma allora, per il noto teorema (applicazione del teorema di Lagrange) sulle funzioni di una variabile reale, $g$ è una funzione costante su $[0,1]$, e quindi $g(0) = g(1)$, cioè $f(x) = f(x_0)$. Si conclude allora che $f(x) = f(x_0)$ per ogni punto $x \in B$, dunque la funzione $f$ è costante su $B$.

La proposizione appena dimostrata vale in ipotesi più generali di quelle enunciate. In particolare vale se $B$ è un qualsiasi sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{R}^N$.

**Esercizio 2.** Si provi che è differenziabile nel suo dominio la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}.$$

*Svolgimento.*
Si può applicare il teorema del differenziale totale.
Calcoliamo le derivate parziali in un punto $(x,y)^T \neq (0,0)^T$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(2y - \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right);$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2yx^2\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^3x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(2x - \frac{y^2x}{x^2+y^2}\right);$$

Si vede facilmente che la funzione ammette derivate parziali anche in $(0,0)^T$ e che queste sono entrambe nulle. Infatti la funzione $f$ ristretta agli assi è la funzione nulla.

Proviamo che le derivate parziali sono entrambe continue in $(0,0)^T$.

Consideriamo la funzione $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Dalla disuguaglianza $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ si ottiene

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

e quindi

$$\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Inoltre si ha

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |x|\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}|x|;$$

e quindi il limite per $(x,y)^T \to (0,0)^T$ è zero.

In modo simile si ha

$$\left|\frac{y^2x}{x^2+y^2}\right| \le |y|\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}|y|;$$

e quindi il limite per $(x,y)^T \to (0,0)^T$ è zero.

Le funzioni $y$ e $x$ sono continue nell'origine e quindi non creano problemi.

Si conclude allora che

$$\lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Per il teorema del differenziale totale concludiamo che $f$ è differenziabile in $(0,0)^T$.

La differenziabilità negli altri punti del dominio è evidente.

**Esercizio 3.** Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } (x,y)^T \ne (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}.$$

Si provi che la funzione $f$ è differenziabile nell'origine anche se le sue derivate parziali non sono ivi continue.

*Svolgimento.*

Calcoliamo la derivata parziale $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Non esiste il limite per $(x,y)^T \to (0,0)^T$. Per convincersi di ciò si consideri ad esempio la restrizione della funzione all'asse delle $x$ (cioè si ponga $y=0$).

Dunque le ipotesi del teorema del differenziale totale non sono soddisfatte. Ciononostante la funzione è differenziabile nell'origine. Infatti mostreremo che l'applicazione lineare nulla: $L(v)=0$ per ogni vettore $v$ è il differenziale della funzione in $(0,0)^T$. Ricordiamo che per definizione l'applicazione lineare $L$ è il differenziale di $f$ nel punto $(0,0)^T$ se si ha $f(x,y) = f(0,0) + L(x,y) + \varepsilon(x,y)\cdot||(x,y)^T||$ con

$$\lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \varepsilon(x,y) = 0.$$

Nel nostro caso è $\varepsilon(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{||(x,y)^T||}$ e

$$\lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \varepsilon(x,y) = \lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \sqrt{(x^2+y^2)}\ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

come si verifica facilmente osservando ad esempio che $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \le 1$ .

**Esercizio 4.** Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Si verifichi che la funzione $f$ ammette tutte le derivate parziali del primo ordine e che queste sono continue su $\mathbb{R}^2$. Si calcolino poi le derivate seconde nell'origine e si facciano opportune osservazioni alla luce del teorema di Schwarz.

*Svolgimento.*

Questa funzione è già stata studiata nell'esercizio 4 della seconda lezione, dove si è verificato che è continua.

Le derivate parziali in un punto $(x,y)^T$ con $y \neq 0$ sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Le derivate parziali nei punti in cui la seconda coordinata è nulla sono entrambe nulle. Infatti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,0) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,h) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{arctg}(\frac{x}{h})}{h}) = 0.$$

Si verifica facilmente che le derivate parziali sono continue anche nei punti in cui la seconda coordinata è nulla. Infatti si ha

$$\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq |y| \left|\frac{y^2+x^2}{x^2+y^2}\right| = |y|$$

e $|y|$ tende a 0 qualunque sia $x_0$ se $(x,y)^T$ tende a $(x_0,0)^T$;

$$\left|2y \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \pi|y| + |y|\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \pi|y| + \frac{1}{2}|y| = (\pi + \frac{1}{2})|y|$$

e $|y|$ tende a 0 qualunque sia $x_0$ se $(x,y)^T$ tende a $(x_0,0)^T$.

(Qui si è usata la disuguaglianza $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ già vista in precedenza.)

Calcoliamo le derivate parziali seconde della $f$ nell'origine.

Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1.$$

Si osserva che le due derivate parziali seconde miste non sono uguali. Alla luce del teorema di Schwarz si può concludere che le derivate seconde non sono continue nell'origine.