Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 3: conseguenze fondamentali della continuità e della differenziabilità.

Esercizio 1. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato. Detta $\overline{A}$ la chiusura di A, sia $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si provi che $f(A)$ è un insieme limitato.

Si dia un esempio di un insieme limitato $A \subset \mathbb{R}$ e di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $f(A)$ è un insieme illimitato.

Svolgimento.

L'insieme $\overline{A}$ è chiuso e limitato, dunque è compatto. Per il teorema di Weierstrass la funzione f ammette massimo e minimo su $\overline{A}$, siano rispettivamente M e m. Dunque $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in \overline{A}$. A maggior ragione $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$, e quindi l'immagine $f(A)$ è un insieme limitato.

Un esempio di un insieme limitato $A \subset \mathbb{R}$ e di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $f(A)$ è un insieme illimitato è $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $f(x) = \operatorname{tg}\ x$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x, y) = \frac{1}{xy}$. Si osservi che $f(1, 1) = 1 > 0$ e $f(-1, 1) < 0$. Esistono punti $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ tali che $f(x, y) = 0$? Questo fatto contraddice il teorema di esistenza degli zeri?

Svolgimento.

Non esistono tali punti. Infatti per ogni numero reale non nullo t si ha $\frac{1}{t} \neq 0$ come è ben noto. Dunque se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ si ha $f(x, y) \neq 0$. D'altra parte la funzione f non è definita in alcun punto in cui $x = 0$ oppure $y = 0$.

Si noti che il dominio della funzione è il piano $\mathbb{R}^2$ al quale dobbiamo togliere gli assi coordinati; dunque non è connesso e quindi il teorema di esistenza degli zeri non è applicabile.

Esercizio 3. Si calcoli il differenziale nel punto $(e, 3)$ della funzione $f(x, y) = x^y$.

Svolgimento.

Le derivate parziali della funzione f sono $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \log x$. Calcolate nel punto diventano $\dfrac{\partial f}{\partial x}(e, 3) = 3e^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(e, 3) = e^3$.

Il differenziale è dunque l'applicazione lineare $L(u, v) = \langle \nabla f(e, 3), (u, v)^T \rangle = 3e^2 u + e^3 v$.

Esercizio 4. Si calcolino nell'origine le derivate parziali e le derivate direzionali rispetto alla direzione del vettore $(1, 1)^T$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{se } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases} .$$

Vale la formula $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v \rangle$? Come si giustifica questo fatto?

Svolgimento.

Le derivate parziali della funzione f nell'origine sono definite e sono entrambe nulle come subito si verifica utilizzando direttamente la definizione di derivata parziale, essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

La derivata direzionale in $(0,0)^T$ lungo la direzione $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ è

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left((0,0)^T + h\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T\right) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}h^3}{\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{4}h^4}}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

La formula $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v\rangle$ non vale perché la funzione f non è differenziabile in $(0,0)^T$.

Esercizio 5. Si scriva l'equazione del piano tangente la superficie di equazione $z = \ln(2x+y)$ nel punto $(-1,3,0)^T$.

Svolgimento.
Controlliamo che il punto $(-1,3,0)$ appartenga alla superficie: $\ln(2\cdot(-1)+3) = 0$.
L'equazione del piano tangente sarà allora ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare)

$$z - z_0 = \langle \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0)^T\rangle.$$

Calcoliamo il gradiente della funzione $f(x,y) = \ln(2x+y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{2x+y}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2x+y};$$

$$\nabla f(-1,3) = (2,1)^T.$$

L'equazione del piano sarà

$$z = 2(x+1) + (y-3) \qquad \text{cioè} \qquad 2x + y - z - 1 = 0.$$

La superficie e il piano tangente