Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 20: superficie nello spazio; area e integrali superficiali; teorema della divergenza e teorema di Stokes.

Esercizio 1. Si trovi un'equazione parametrica per rappresentare la parte limitata del paraboloide ellittico

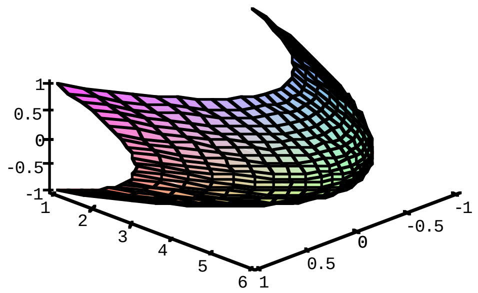
$$y = 6 - 3x^2 - 2z^2$$

delimitato dal piano xz.

Si scriva l'equazione del piano tangente nel generico punto.

Svolgimento.

Si tratta della parte del paraboloide ellittico $y = 6 - 3x^2 - 2z^2$, con $y \geq 0$.



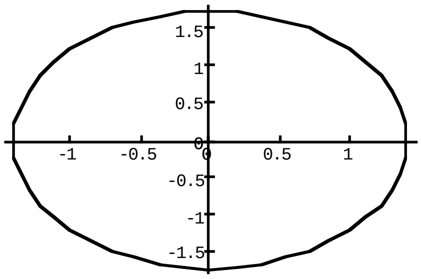
Possiamo rappresentarlo mediante equazioni parametriche come segue:

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = 6 - 3u^2 - 2v^2, \\ z(u,v) = v, \end{cases}$$

dove

$$(u,v)^T \in \{(u,v)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{3} \leq 1\};$$

(si tratta della regione interna ad un'ellisse).



Per scrivere l'equazione del piano tangente non è necessario ricorrere alla formula del versore normale mediante le derivate parziali della parametrizzazione. Poiché infatti la superficie considerata è il grafico della funzione $f(x,z) = 6 - 3x^2 - 2z^2$, l'equazione del piano tangente nel punto $(x_0, f(x_0,z_0), z_0)$ è

$$y - f(x_0, z_0) = -6x_0(x - x_0) - 4z_0(z - z_0),$$

cioè,

$$6x_0x + y + 4z_0z - 3x_0^2 - 2z_0^2 - 6 = 0.$$

Esercizio 2.
Si consideri la superficie rappresentata dalle seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(u,v) = uv, \\ y(u,v) = ue^v, \\ z(u,v) = ve^u, \end{cases}$$

con $(u,v)^T \in \mathbb{R}^2$.
Si dica se la superficie è regolare e si calcoli l'equazione del piano tangente nel generico punto della superficie.

Svolgimento.
Le funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ sono di classe C^∞.
Calcoliamo le derivate parziali :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = u;$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = e^v; \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = ue^v;$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = ve^u; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = e^u.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} v & e^v & ve^u \\ u & ue^v & e^u \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2 per ogni punto $(u,v)^T$ diverso dal punto $(1,1)^T$. Dunque la superficie è regolare in ogni punto ad eccezione del punto $(1,e,e)^T$.
Un vettore normale alla superficie nel punto $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$ è

$$(v, e^v, ve^u)^T \wedge (u, ue^v, e^u)^T = (e^{u+v}(1-uv), ve^u(u-1), ue^v(v-1))^T,$$

e il versore normale è

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{e^{2(u+v)}(1-uv)^2 + v^2e^{2u}(u-1)^2 + u^2e^{2v}(v-1)^2}} \left(e^{u+v}(1-uv), ve^u(u-1), ue^v(v-1)\right)^T.$$

Il piano tangente la superficie nel punto $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$ è

$$e^{u+v}(1-uv)(x-uv) + ve^u(u-1)(y-ue^v) + ue^v(v-1)(z-ve^u) = 0.$$

Si noti che il piano tangente non è definito nel punto $(1,e,e)$ che si ottiene per $(u,v)^T = (1,1)^T$.

Esercizio 3. Un'idea intuitiva per definire l'area di una superficie può essere quella di approssimare una superficie con tratti di superficie piane triangolari, prendendo poi l'estremo superiore di queste aree, in modo simile a quello che si fa per definire la lunghezza di una curva.
Si provi che questa idea non è praticabile.
Si consideri ad esempio un cilindro e si mostri che può essere ricoperto internamente con pezzettini di carta triangolari in modo che l'estremo superiore dell'area della carta necessaria per avvolgerlo sia infinito.

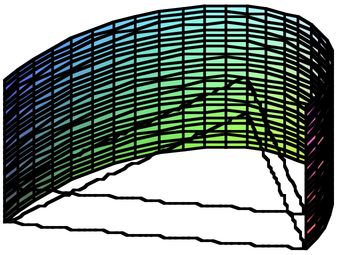
Svolgimento.
Consideriamo la metà di un cilindro (con il taglio passante per l'asse verticale) di raggio di base 1 e altezza 1. Si può rappresentare il cilindro come segue:

$$C = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Suddividiamo la superficie di tale oggetto in n striscioline orizzontali ciascuna di altezza $\frac{1}{n}$.

Costruiamo n triangoli ciascuno dei quali ha i vertici nei punti $(0, -1, \frac{i}{n})^T$, $(1, 0, \frac{i+1}{n})^T$, $(0, 1, \frac{i}{n})^T$, con $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

La figura seguente mostra due di questi triangoli:



Ciascuno di questi triangolini ha base 2 e altezza $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} > 1$. Dunque la somma delle aree di tutti i triangolini è $> n$. Si possono aggiungere altri triangolini in modo da ottenere una triangolazione completa della superficie. È chiaro che l'area totale della triangolazione sarà maggiore di n. Poiché n si può prendere grande a piacere possiamo concludere che l'estremo superiore delle aree delle triangolazioni della superficie considerata è infinito.

Esercizio 4.

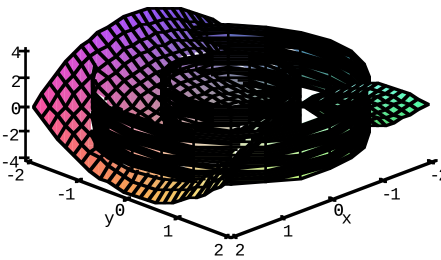
Si calcoli l'area della parte del paraboloide iperbolico $z = y^2 - x^2$ che è delimitata dai cilindri $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Svolgimento.

La superficie può essere parametrizzata dalla funzione

$$\varphi(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)^T;$$

con $(u, v)^T \in \mathbb{R}^2$ tali che $1 \leq u^2 + v^2 \leq 4$.



Calcoliamo il vettore normale:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 0, -2u)^T, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 1, 2v)^T;$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (2u, -2v, 1)^T.$$

Naturalmente si poteva anche osservare che la superficie considerata è il grafico della funzione $f(x, y) = y^2 - x^2$ e usare la formula $||\mathbf{n}|| = \sqrt{1 + ||\nabla f||^2}$.

Per calcolare l'area A della superficie S dobbiamo calcolare l'integrale

$$A(S) = \iint_S ||\mathbf{n}|| \, dudv.$$

Conviene usare coordinate polari; si ottiene allora

$$A(S) = \int_1^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4\rho^2 + 1} \, \rho \, d\vartheta \right) d\rho = \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{t} \, dt = \frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} \right);$$

dove per integrare rispetto a ρ si è fatta la sostituzione $t = 4\rho^2 + 1$, $dt = 8\rho\, d\rho$.

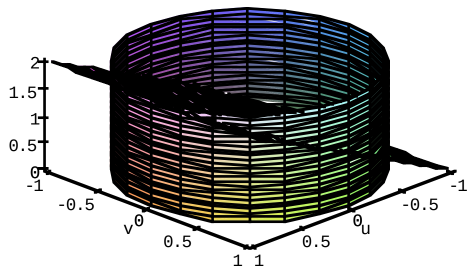
Esercizio 5. Si calcoli l'integrale

$$\iint_S z\, d\sigma,$$

dove S è la superficie definita dal cilindro di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1$, dal disco $D = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$ e dalla porzione di piano $\pi = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x - z + 1 = 0;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento.

La superficie S è l'unione di tre superfici regolari, che chiameremo " tappo superiore", " superficie laterale" e " tappo inferiore".



L'integrale sul tappo inferiore D dà contributo nullo, perché su tale superficie la funzione z è identicamente nulla.

Studiamo l'integrale sul tappo superiore.

Questa superficie può essere parametrizzata dalla funzione

$$\varphi(u, v) = (u, v, u + 1)^T;$$

dunque

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 0, 1)^T, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 1, 0)^T;$$

$$\mathbf{n} = (-1, 0, 1)^T.$$

Naturalmente si poteva anche osservare che la superficie considerata è il grafico della funzione $f(x, y) = x + 1$ e usare la formula $||\mathbf{n}|| = \sqrt{1 + ||\nabla f||^2}$.

Per calcolare l'integrale su questa superficie conviene usare coordinate polari

$$\int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \rho \cos\vartheta) \sqrt{2}\rho\, d\vartheta \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2}\rho\, d\rho + \int_0^1 \sqrt{2}\rho^2\, d\rho \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta = \sqrt{2}\pi.$$

Calcoliamo ora l'integrale sulla superficie laterale. Questa può essere parametrizzata mediante la funzione

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)^T;$$

dove $u \in [0, 2\pi]$ e $0 \leq v \leq 1 + \cos u$.

Si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (-\sin u, \cos u, 0)^T, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 0, 1)^T;$$

$$\mathbf{n} = (\cos u, \sin u, 0)^T.$$

Calcolando l'integrale (si osservi che $||\mathbf{n}|| = 1$) si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{1+\cos u} v\, dv \right) du = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos^2 u + 2\cos u)\, du = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \frac{1}{2}(\cos 2u + 1) + 2\cos u)\, du = \frac{3}{2}\pi.$$

Sommando i contributi all'integrale delle tre superfici si ottiene infine

$$\iint_S z\, d\sigma = \pi\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right).$$

Esercizio 6. Si calcoli la carica elettrica contenuta nella calotta sferica

$$\{(x,y,z,)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le r^2,\ z \ge 0\};$$

dove il campo elettrico è definito da $E(x,y,z) = (x,y,2z)^T$.

Svolgimento.

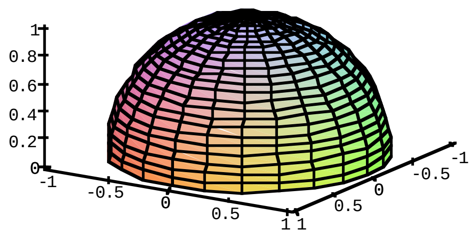
La legge di Gauss dice che la carica racchiusa da una superficie S è proporzionale al flusso del campo; cioè

$$Q = \varepsilon_0 \iint_S \langle E, \mathbf{n}\rangle\, d\sigma.$$

Possiamo parametrizzare la calotta sferica nel modo usuale:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = r\cos\varphi; \end{cases}$$

con $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $\vartheta \in [-\pi, \pi]$.



Si ha

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = r\cos\varphi\cos\vartheta; \qquad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = r\cos\varphi\sin\vartheta; \qquad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial x}{\partial\vartheta} = -r\sin\varphi\sin\vartheta; \qquad \frac{\partial y}{\partial\vartheta} = r\sin\varphi\cos\vartheta; \qquad \frac{\partial z}{\partial\vartheta} = 0;$$

dunque

$$\mathbf{n} = (r^2\sin^2\varphi\cos\vartheta, r^2\sin^2\varphi\sin\vartheta, r^2\sin\varphi\cos\varphi)^T.$$

Calcoliamo il flusso del campo:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\varphi\cos\vartheta\cdot r^2\sin^2\varphi\cos\vartheta + r\sin\varphi\sin\vartheta\cdot r^2\sin^2\varphi\sin\vartheta + 2r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\right) d\vartheta =$$

$$= r^3\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^2\vartheta + \sin^3\varphi\sin^2\vartheta + 2\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi\right) d\vartheta =$$

$$= r^3\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi(\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi)\, d\varphi\right) d\vartheta = 2\pi r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2\varphi)\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\pi r^3 \left[-\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\pi r^3.$$

Osserviamo che il flusso attraverso il tappo inferiore della superficie è nullo. Infatti su tale superficie la componente del campo parallelo alla normale (cioè la componente z) è nulla, essendo ivi $z = 0$.

Concludiamo che la carica elettrica contenuta in S è

$$Q = \varepsilon_0 \frac{8}{3}\pi r^3.$$

Esercizio 7. Si calcoli il flusso attraverso la superficie S del campo

$$F(x, y, z) = (xz^2, \frac{1}{3}y^3 + \operatorname{tg} z, x^2 z + y^2)^T,$$

dove S è la semisfera superiore

$$S = \{(x, y, z)^T \in \mathrm{I\!R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}.$$

Svolgimento.

Si potrebbe calcolare direttamente il flusso attraverso la superficie, ma il conto non sarebbe molto agevole. Osserviamo che la divergenza del campo è una funzione molto semplice, essendo

$$\operatorname{div}(F) = z^2 + y^2 + x^2.$$

Si può dunque provare ad usare il teorema della divergenza.

Si noti però che la superficie S non è chiusa.

Consideriamo allora la superficie chiusa ottenuta dall'unione di S e del tappo inferiore

$$D = \{(x, y, z)^T \in \mathrm{I\!R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}.$$

Per il teorema della divergenza si ha

$$\iint_{S\cup D} \langle F, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} F \, dm;$$

dove l'integrale triplo al secondo membro è calcolato sulla semisfera solida superiore

$$B = \{(x, y, z)^T \in \mathrm{I\!R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}.$$

L'integrale triplo si calcola facilmente in coordinate sferiche:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \rho^2 \, \rho^2 \sin\varphi \, d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho = \frac{2}{5}\pi.$$

Calcoliamo ora il flusso attraverso il tappo inferiore D. La normale esterna è $(0, 0, -1)^T$, la funzione da integrare nel disco è $-y^2$; conviene usare coordinate polari:

$$\int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} (-\rho^2 \sin^2\vartheta) \, \rho \, d\vartheta \right) d\rho = -\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\vartheta \, d\vartheta = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{4}\sin 2\vartheta \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\pi}{4};$$

dove, nel calcolo dell'integrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\vartheta \, d\vartheta$ si è usata l'identità $\sin^2\vartheta = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\vartheta + 1)$.

Il flusso attraverso la superficie S sarà perciò $\displaystyle\frac{2}{5}\pi - \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{13}{20}\pi$.

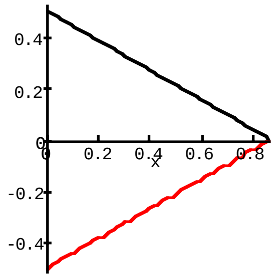
Esercizio 8. Si consideri il solido generato da un triangolo equilatero di lato a, ruotato attorno ad uno dei suoi lati. Si determinino la superficie e il volume del solido.

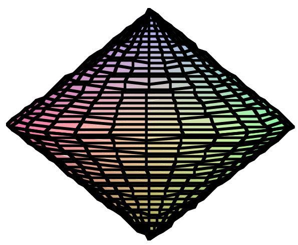
Svolgimento.

Useremo i teoremi di Pappo-Guldino.

Il baricentro di un triangolo è il punto di intersezione delle mediane che, per il triangolo equilatero, coincidono con bisettrici e altezze. In un sistema di assi cartesiani yz, con l'asse y orizzontale e l'asse z verticale, i vertici del triangolo equilatero di lato a, con un lato appoggiato all'asse verticale, sono $(0, \frac{a}{2})^T$, $(0, -\frac{a}{2})^T$, $(a\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)^T$. La coordinata y del baricentro è $\hat{y} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

Nella figura seguente si è posto $a = 1$:





L'area del triangolo è $A = \frac{1}{2}a \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Per il secondo teorema di Pappo-Guldino si calcola facilmente il volume del solido ottenuto ruotando il triangolo intorno all'asse z:

$$V = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{4}a^3.$$

La coordinata y del baricentro della curva costituita dai due lati del triangolo che non sono adiacenti all'asse z è il punto medio dell'altezza del triangolo, dunque è $\hat{y} = a\frac{\sqrt{3}}{4}$.

La lunghezza di tale curva è $2a$.

Dunque, per il primo teorema di Pappo-Guldino si ottiene

$$A = 2\pi \cdot a\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \sqrt{3}\pi a^2.$$

I risultati ottenuti erano prevedibili. Il solido che abbiamo ottenuto è un doppio cono con raggio di base $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, altezza $\frac{a}{2}$ e apotema a. Le formule del volume e dell'area della superficie laterale di un cono con raggio di base r, altezza h e apotema a sono rispettivamente

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad\qquad A = \pi r a.$$

Nel nostro caso, (moltiplicando per due perché il cono è doppio) si ottiene

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi}{4}a^3;$$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \sqrt{3}\pi a^2.$$