Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 2: continuità, limiti e differenziabilità di una funzione in più variabili.

Esercizio 1. Si calcoli, se esiste

$$\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{x + xy}{x + y}.$$

Svolgimento.

Se il limite della funzione $f(x,y) = \dfrac{x + xy}{x + y}$ esiste deve esistere anche il limite di ogni sua restrizione. In particolare si può studiare la restrizione della f all'asse delle y. In questo caso la f è identicamente nulla e quindi il suo limite è 0.

Studiamo ora la restrizione della f all'asse delle x. Si ha $y = 0$ e pertanto la funzione diventa $\frac{x}{x} = 1$ e il suo limite è 1.

Il limite della funzione f pertanto non esiste.

Esercizio 2. Si calcoli, se esiste,

$$\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Svolgimento.

Studiando la restrizione della funzione f all'asse delle x si vede che il limite, se esiste, deve essere uguale a 0. Anche la restrizione all'asse delle y ha limite 0. Dire che $\lim\limits_{(x,y)^T \to (0,0)^T} f(x,y) = 0$ significa che per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un $\delta > 0$ tale che per ogni $(x,y)^T \in \mathrm{dom} f \setminus \{(0,0)^T\}$ se $||(x,y)^T - (0,0)^T|| < \delta$ allora $|f(x,y) - 0| < \epsilon$. (Ricordiamo che $||(x,y)^T|| = \sqrt{x^2 + y^2}$).

Proviamo a maggiorare la funzione $|\dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2}|$. Ricordiamo che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (questa si può provare ad esempio a partire dalle disuguaglianze $(x+y)^2 \geq 0$ e $(x-y)^2 \geq 0$). Inoltre è sempre $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = ||(x,y)^T||$. Si ottiene allora

$$|\frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}| = 3|x| \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2}|x| \leq \frac{3}{2}||(x,y)^T||.$$

Fissato $\epsilon > 0$ è allora sufficiente prendere $\delta < \frac{2}{3}\epsilon$ e la condizione richiesta è verificata.

Pertanto $\lim\limits_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$

Esercizio 3. Si studi la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}.$$

Svolgimento.

La funzione f è continua in ogni punto diverso da $(0,0)^T$.

Affinché la funzione sia continua anche in $(0,0)^T$ deve essere $\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} = f((0,0)^T) = 0$.

Studiamo la restrizione della funzione f all'asse delle x. In questo caso la funzione vale $\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Pertanto il limite della restrizione è $\frac{1}{2} \neq 0$. La funzione f dunque non è continua.

Esercizio 4. Si studi la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \text{arctg}(\frac{x}{y}) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento.
Dobbiamo controllare la continuità della funzione in tutti i punti del tipo $(x_0, 0)^T$ con $x_0 \in \mathbb{R}$.
Osserviamo che essendo $|\text{arctg}(z)| < \frac{\pi}{2}$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ si ottiene per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la maggiorazione

$$|y^2 \text{arctg}(\frac{x}{y})| < \frac{\pi}{2} y^2 \leq \frac{\pi}{2}((x - x_0)^2 + y^2) = \frac{\pi}{2} ||(x,y)^T - (x_0, 0)^T||^2.$$

Fissato qualunque $\epsilon > 0$ si può scegliere un numero $\delta > 0$ tale che $\delta < \sqrt{\frac{2\epsilon}{\pi}}$.
Si ottiene allora che, per ogni punto $(x,y)^T$ tale che $||(x,y)^T - (x_0, 0)^T|| < \delta$, si ha $|y^2 \text{arctg}(\frac{x}{y}) - 0| < \epsilon$.
Questo prova la continuità della funzione f in ogni punto$(x_0, 0)^T$. La funzione f è quindi continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Si poteva anche applicare direttamente il teorema sul limite della funzione prodotto. La funzione arcotangente è limitata e viene moltiplicata per una funzione (y^2) il cui limite per $(x,y)^T \to (x_0, 0)^T$ è 0. La funzione prodotto ammette allora limite per $(x,y)^T \to (x_0, 0)^T$ e questo limite è 0.

Esercizio 5. Si studi la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 - y^2} & \text{se } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{se } |x| = |y| \end{cases} .$$

Svolgimento.
La funzione f è continua in ogni punto che non appartiene all'unione delle due bisettrici del primo-terzo e del secondo-quarto quadrante. Dobbiamo studiare la continuità della funzione nei punti delle rette $y = x$ e $y = -x$. Ad esempio studiamo il comportamento della funzione f in un intorno del punto $(1,1)^T$. Dobbiamo controllare se è $\lim_{(x,y)^T \to (1,1)^T} f(x,y) = 0$. Possiamo studiare la restrizione della funzione ad una curva che passa per il punto $(1,1)^T$ (attenzione a scegliere una curva che non intersechi la bisettrice $x = y$ in un intorno del punto; ad esempio la scelta $y = x$ è da scartare!). Si può considerare la curva $y = x^2$. La funzione ristretta a tale curva diventa $\dfrac{x^2 x^2}{x^2 - x^4} = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$. Ora è evidente che il limite di tale funzione per $x \to 1$ è infinito. Dunque la funzione non è continua in tale punto.

Un ragionamento simile si può fare in qualunque punto del tipo $(x_0, x_0)^T$ oppure $(x_0, -x_0)^T$. Vediamo ad esempio il caso di un punto $(x_0, x_0)^T$ appartenente alla retta $y = x$. Si può considerare un tratto della curva di equazione $y = \frac{x_0^2}{x}$ in un intorno di $(x_0, x_0)^T$. Questa curva passa per il punto $(x_0, x_0)^T$ come subito si verifica. Inoltre non interseca in altri punti la retta $y = x$. La funzione f ristretta a tale curva diventa

$$\frac{x^2 \frac{x_0^2}{x}}{x^2 - \frac{x_0^4}{x^2}} = \frac{x_0^2 x^3}{x^4 - x_0^4}.$$

Il limite per $x \to x_0$ è dunque infinito.

Abbiamo provato che la funzione f è discontinua in tutti i punti appartenenti alle bisettrici ad eccezione eventualmente dell'origine. Se la funzione fosse continua nell'origine però, dovrebbe essere localmente limitata in $(0,0)^T$, e noi abbiamo verificato che la funzione è illimitata in ogni punto della retta $y = x$, dunque in ogni intorno dell'origine.

La funzione f pertanto non è continua in nessun punto appartenente alle bisettrici.

Esercizio 6. Si calcolino le derivate parziali della funzione

$$f(x, y, z) = \tan(x + 3y^2) + z.$$

Soluzione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(x + 3y^2)}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6y}{\cos^2(x + 3y^2)}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1.$$

Esercizio 7. Si calcolino le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = \frac{\log(\sin x + y^2)}{x^2 y}.$$

Soluzione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^3 y}\left(\frac{x \cos x}{\sin x + y^2} - 2\log(\sin x + y^2)\right); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 y^2}\left(\frac{2y^2}{\sin x + y^2} - \log(\sin x + y^2)\right).$$

Esercizio 8. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto di $\mathbb{R}^2$, sia $(x_0, y_0)^T \in A$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $(x_0, y_0)^T$. Sia $\varphi(t) = (x_0, y_0)^T + t\mathbf{v}$ l'equazione parametrica della retta per il punto $(x_0, y_0)^T$ di direzione $\mathbf{v}$. Si indichi con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione composta $g(t) = f(\varphi(t))$.
Si verifichi che $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = g'(0)$.

Svolgimento.
Si ha per definizione di derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((x_0, y_0)^T + t\mathbf{v}\right) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Esercizio 9. Si calcoli la derivata direzionale nell'origine lungo la direzione del versore $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ della funzione $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{se } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}.$

Svolgimento.
Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((0, 0)^T + t\mathbf{v}\right) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{t v_1 t^2 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$