Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 19: campi vettoriali e formule di Gauss-Green nel piano.

Esercizio 1. Si determini una funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi(x,y) \\ \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

sia conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$.

Svolgimento.
Si noti che in questo esempio non è sufficiente mostrare che il campo è irrotazionale poiché il dominio non è semplicemente connesso.
Affiché il campo sia conservativo deve esistere un potenziale $V(x,y)$ tale che

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = \varphi(x,y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

In particolare sarà

$$V(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\, dy = -\frac{1}{2}\log|x^2+y^2| + c(x),$$

dove $c(x)$ è una funzione costante ripetto alla variabile y. Dovrà poi essere

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = \varphi(x,y)$$

e quindi ad esempio (ponendo $c(x) = 0$)

$$\varphi(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Esercizio 2. Sia $A = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$.
Si determini una funzione $\varphi : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che il campo vettoriale $g : A \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi(x,y) \\ \\ \dfrac{-x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

sia conservativo su A.

Svolgimento.
In questo caso il dominio è semplicemente connesso e quindi un campo è conservativo se e solo se è irrotazionale.
Calcoliamo il rotore del campo:

$$||\mathrm{rot}(g)|| = \left|\left| \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{x^2+y^2} - \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \right|\right| = \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \right|.$$

Imponendo $||\mathrm{rot}(g)|| = 0$ otteniamo

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

e quindi mediante integrazione in y

$$\varphi(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + c(x)$$

dove $c(x)$ è una funzione costante rispetto a y.

Una soluzione del problema è data dalla funzione

$$\varphi(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Esercizio 3. Si dica se il campo vettoriale

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x\log(y^2) \\ \\ \dfrac{x^2}{y} \end{pmatrix}$$

ammette potenziale. Interpretando g come una forza, si calcoli il lavoro da essa compiuto per portare una particella dal punto $(1,1)^T$ al punto $(0,\varepsilon)^T$ lungo una curva congiungente i due punti.

Si vuole poi calcolare il lavoro compiuto per portare una particella dal punto $(1,1)^T$ all'origine. Si noti però che l'origine non appartiene al dominio della funzione. Cosa succede in questo caso?

Svolgimento.

Il dominio del campo g non è connesso, ma è composto da due parti semplicemente connesse (i due semipiani $y > 0$ e $y < 0$). Studiamo il campo nel semipiano $y > 0$. Uno studio simile può essere fatto anche sul semipiano $y < 0$.

Calcolando il rotore del campo si vede subito che g è irrotazionale essendo

$$\frac{\partial}{\partial y} x\log(y^2) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{y} = \frac{2x}{y}.$$

Il campo è pertanto conservativo nel semipiano $y > 0$.

L'integrale richiesto non dipende dunque dal cammino seguito per portare la particella dal punto $(1,1)^T$ al punto $(0,\varepsilon)^T$, ma solo dagli estremi. Si può ad esempio scegliere il cammino descritto dal segmento verticale $(0,t)^T$ con $\varepsilon \le t \le 1$ unito al segmento orizzontale $(t,1)^T$ con $0 \le t \le 1$. Si avrà pertanto

$$\int_\gamma g\,ds = \int_\varepsilon^1 0\,dt + \int_0^1 \langle (0,t^2)^T, (1,0)^T \rangle\,dt = 0.$$

Si può facilmente anche calcolare il potenziale del campo. Integrando la funzione $x\log(y^2)$ rispetto alla variabile x oppure la funzione $\frac{x^2}{y}$ rispetto alla variabile y si ottiene $V(x,y) = x^2\log y + C$. Si osservi che

$$V(0,\varepsilon) - V(1,1) = 0,$$

come deve essere.

Studiamo ora il medesimo problema dove al posto del punto $(0,\varepsilon)^T$ consideriamo il punto $(0,0)^T$. Intuitivamente si potrebbe pensare che il lavoro sia ancora nullo, considerando il limite per $\varepsilon \to 0$ del lavoro compiuto fino al punto $(0,\varepsilon)^T$.

Come prima, si può calcolare l'integrale, questa volta in senso generalizzato, lungo il segmento verticale $(0,t)^T$ con $0 < t \le 1$ unito al segmento orizzontale $(t,1)^T$ con $0 \le t \le 1$. Evidentemente questo integrale vale 0.

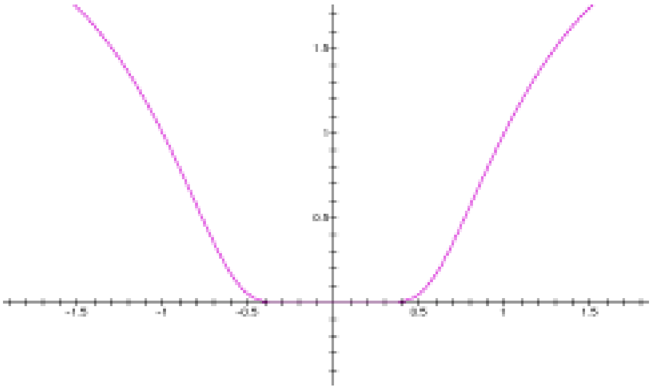
Consideriamo però ora la seguente curva che congiunge il punto $(1,1)^T$ con l'origine: $\gamma : (0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = (x(t),y(t))^T = \left(t, e^{1-\frac{1}{t^2}}\right)^T.$$

Si ha $x'(t) = 1$ e $y'(t) = \dfrac{2}{t^3} e^{1-\frac{1}{t^2}}$.
Dunque l'integrale è

$$\int_0^1 \left(t \log \left(e^{1-\frac{1}{t^2}} \right)^2 + \frac{t^2}{e^{1-\frac{1}{t^2}}} \frac{2}{t^3} e^{1-\frac{1}{t^2}} \right) dt = \int_0^1 2t \, dt = 1 \neq 0.$$

Intuitivamente, il motivo per cui l'integrale non è nullo è che la curva $\gamma(t)$ "si avvicina moltissimo" all'asse delle x, sul quale il campo è illimitato. La figura seguente mostra l'andamento della curva in un intorno dell'origine



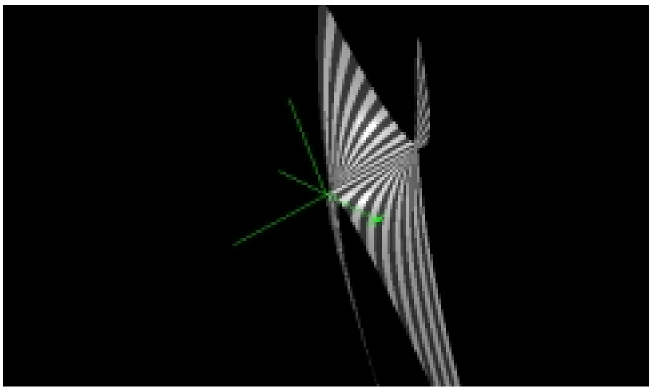
Il fatto che il campo sia conservativo nell'aperto $A = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ non garantisce affatto che lo sia anche sulla chiusura.

Si osservi che, a differenza di quanto un'occhiata superficiale possa suggerire, non si può estendere il potenziale V al punto $(0, 0)^T$.

Non esiste il limite per $(x, y)^T \to (0, 0)^T$ di $V(x, y)$. Infatti, la restrizione del potenziale sull'asse delle y è 0, e dunque tale limite, se esistesse, dovrebbe essere nullo. D'altra parte, considerando la restrizione del potenziale alla curva γ si ottiene

$$\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} V(\gamma(t)) = \lim_{t \to 0} t^2 \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) = -1 \neq 0.$$

La figura seguente mostra l'andamento del potenziale in un intorno dell'origine; si noti che è illimitato in un intorno dell'origine.



Esercizio 4. Si stabilisca se il campo

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} z + xy \cos(xy) + \sin(xy) \\ x^2 \cos(xy) \\ x + 2z \end{pmatrix}$$

è conservativo.

Si calcoli

$$\int_\Gamma g(x,y,z)\,ds$$

dove Γ è la curva

$$\Gamma = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x = y,\ x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

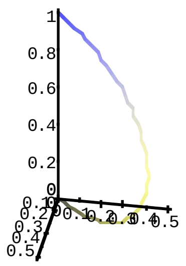
orientata in modo che il punto $(0,0,0)^T$ preceda il punto $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)^T$.

Svolgimento.
Calcoliamo il rotore del campo $g(x,y,z)$.
Posto $g_1(x,y,z) = z + xy\cos(xy) + \sin(xy)$, $g_2(x,y,z) = x^2\cos(xy)$ e $g_3(x,y,z) = x + 2z$, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{\partial g_2(x,y,z)}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy); \\ \dfrac{\partial g_1(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial g_3(x,y,z)}{\partial x} = 1; \\ \dfrac{\partial g_2(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial g_3(x,y,z)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Il rotore di g ha tutte e tre le componenti nulle. Pertanto il campo g è irrotazionale e quindi è conservativo perchè è definito su tutto $\mathbb{R}^3$.

La curva Γ è un arco di cerchio che giace sulla sfera di centro $(0,0,\frac{1}{2})^T$ e raggio $\frac{1}{2}$ e congiunge il punto $(0,0,0)^T$ con il punto $(0,0,1)^T$ (potremmo dire che Γ è un meridiano che congiunge il polo sud al polo nord).



Poiché il campo è conservativo per calcolare l'integrale richiesto si può scegliere un qualunque cammino che congiunga i punti $(0,0,0)^T$ e $(0,0,1)^T$. Il cammino più semplice e quello che percorre l'asse delle z, cioè $\gamma(t) = (0,0,t)^T$ con $0 \le t \le 1$.

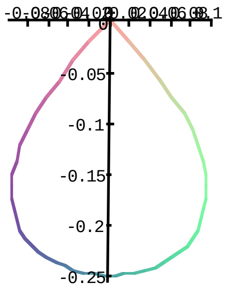
L'integrale richiesto diventa allora

$$\int_\Gamma g(x,y,z)\,ds = \int_0^1 \langle (t,0,2t)^T, (0,0,1)^T \rangle\,dt = \int_0^1 2t\,dt = 1.$$

Esercizio 5. Si calcoli l'area del dominio regolare racchiuso dalla curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t(t-1) \\ t(t-1)(2t-1) \end{pmatrix}.$$

Svolgimento.



Poniamo $x(t) = t(t-1)$ e $y(t) = t(t-1)(2t-1)$.
Si ha

$$\begin{cases} x' = 2t - 1 \\ y' = (2t-1)^2 + 2(t^2 - t) \end{cases}.$$

Applicando la formula di Green si ottiene facilmente l'area A del dominio :

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) \; dt = \frac{1}{2} \int_0^1 2(t^2 - t)^2 \; dt = \frac{1}{30}.$$

Esercizio 6. Sia γ una qualunque curva regolare semplice chiusa che contenga nella sua parte interna l'origine $(0,0)^T$ del piano. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

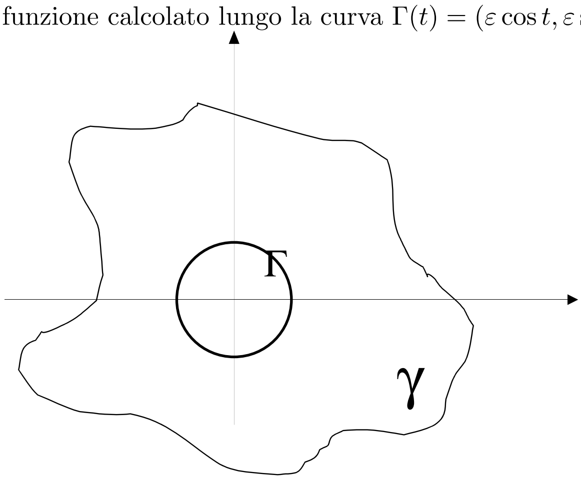
$$f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T.$$

Si provi che

$$\int_\gamma f \, ds = 2\pi.$$

Svolgimento.
Poichè l'origine è contenuta nella parte interna della curva, esiste un circolo di centro l'origine e di raggio opportuno $\varepsilon > 0$ tutto contenuto all'interno della curva.

Useremo la formula di Gauss-Green per dimostrare che l'integrale cercato è uguale all'integrale della funzione calcolato lungo la curva $\Gamma(t) = (\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t)^T$ con $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$.



Per la formula di Gauss-Green si ha

$$\int_\gamma X \, dx + Y \, dy + \int_{-\Gamma} X \, dx + Y \, dy = \iint_D (Y_x - X_y) \; dxdy;$$

dove si è indicata con D la regione del piano compresa tra il sostegno della curva Γ e il sostegno della curva γ. Si ottiene allora

$$\int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right) - \int_\Gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right) = \iint_D \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) dxdy = 0.$$

Dunque è sufficiente calcolare l'integrale lungo il circolo di raggio ε:

$$\int_\Gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right) = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \sin^2 t + \varepsilon^2 \cos^2 t}{\varepsilon^2 \sin^2 t + \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt = 2\pi.$$