Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 18: curve e integrali curvilinei.

Esercizio 1. Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\gamma(t) = \left(\cos t \sin t, \sin^2 t, 2t\right)^T .$$

Si dica se γ è una curva continua, regolare, semplice. Si trovino le equazioni del vettore tangente la curva nel punto $\gamma(t)$. Si calcoli la lunghezza della curva γ.

Svolgimento.

La funzione γ è continua e derivabile. La curva dunque è continua. Per verificare che è anche regolare dobbiamo controllare che la sua derivata non si annulli in alcun punto dell'intervallo $[0, \pi]$.

Il vettore tangente la curva nel punto $\gamma(t)$ è

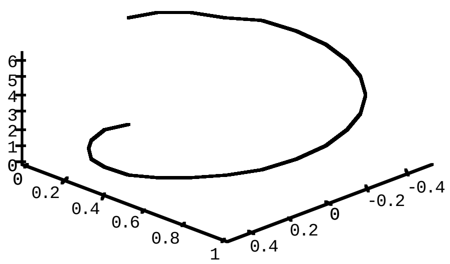
$$\gamma'(t) = \left(-\sin^2 t + \cos^2 t, 2 \sin t \cos t, 2\right)^T = (\cos 2t, \sin 2t, 2)^T .$$

Il vettore $\gamma'(t)$ non si annulla mai (la terza componente è costante!), dunque la curva è regolare.

La curva γ è semplice perché la terza componente della funzione γ è iniettiva.

Calcoliamo la lunghezza di γ:

$$l(\gamma) = \int_0^{\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 2t + 4}\, dt = \sqrt{5}\pi.$$



Esercizio 2. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma(t) = \left(t^2 - t, 2t^3 - 3t^2 + t\right)^T .$$

Si dica se γ è una curva continua, regolare, semplice. Si trovino le equazioni del vettore tangente la curva nel punto $\gamma(t)$. Si trovino i valori del parametro t per i quali la curva è contenuta nel semipiano $x \leq 0$. Si dica se il sostegno dell'arco di curva contenuto in tale semipiano è un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$. Si dica se la curva γ è limitata.

Svolgimento.

La curva γ è una curva continua, regolare, ma non è semplice. Infatti $\gamma(0) = \gamma(1)$. Il vettore tangente è

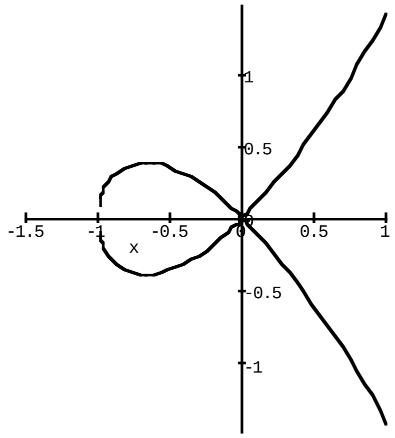
$$\gamma'(t) = \left(2t - 1, 6t^2 - 6t + 1\right)^T .$$

Si osservi che nel punto $(0, 0)^T$ vi sono due tangenti. Il punto $(0, 0)^T$ è un nodo della curva.

L'arco di curva contenuto nel semipiano $x \leq 0$ si ottiene risolvendo la disequazione $t^2 - t \leq 0$, che è soddisfatta dai valori di $t \in [0, 1]$.

Poiché la funzione γ è continua e l'intervallo $[0,1]$ è compatto, per il teorema di compattezza il sostegno dell'arco di curva contenuto nel semispazio $x \leq 0$ è compatto, dunque è limitato.

La curva γ invece non è limitata. Entrambe le componenti tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$. Per $t \to -\infty$ la componente x tende ancora a $+\infty$ mentre la componente y tende a $-\infty$.



Questa curva è nota con il nome di *Folium di Cartesio*.

Esercizio 3. Sia $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\gamma(t) = (\sin(6t), \cos(6t), 4t)^T .$$

Si calcoli l'ascissa curvilinea di γ e si riparametrizzi la curva secondo la lunghezza d'arco. Si verifichi che il vettore tangente, rappresentato in tale parametrizzazione, è unitario.

Svolgimento.

Ricordo che per ascissa curvilinea di una curva definita su un intervallo $[t_0, t_1]$ si intende la lunghezza $s(t)$ dell'arco di curva da t_0 a t.

Il vettore tangente la curva γ è

$$\gamma'(t) = (6\cos(6t), -6\sin(6t), 4).$$

L'ascissa curvilinea è

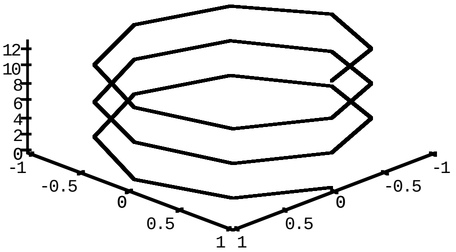
$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(t)|\, dt = 2\sqrt{13}t.$$

Si ottiene dunque $t = \frac{s}{2\sqrt{13}}$. La parametrizzazione in lunghezza d'arco è

$$\phi(s) = \gamma(t(s)) = \left(\sin(\frac{3}{\sqrt{13}}s), \cos(\frac{3}{\sqrt{13}}s), \frac{2}{\sqrt{13}}s\right)^T .$$

Verifichiamo che il vettore $\phi'(s)$ è unitario:

$$|\phi'(s)|^2 = \frac{9}{13}\cos^2(\frac{3}{\sqrt{13}}s) + \frac{9}{13}\sin^2(\frac{3}{\sqrt{13}}s) + \frac{4}{13} = 1.$$



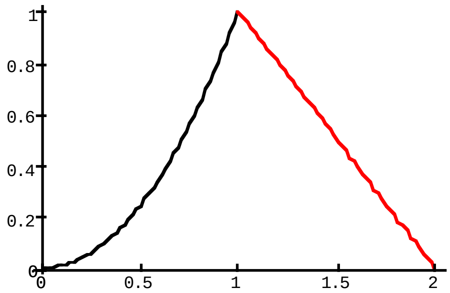
Esercizio 4. Sia $\gamma(t)$ una curva semplice il cui sostegno è il grafico nel piano xy della funzione $f(x) = x^2$ per $x \in [0,1]$, seguito dal segmento che congiunge il punto $(1,1)^T$ con il punto $(2,0)^T$.

Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_\gamma 2x\,ds$.

Svolgimento.

La curva γ si può parametrizzare nel modo seguente:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t,t^2)^T & \text{per } t \in [0,1], \\ (t, 2-t)^T & \text{per } t \in [1,2]. \end{cases}$$



Il vettore tangente è

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (1,2t)^T & \text{per } t \in [0,1], \\ (1,-1)^T & \text{per } t \in [1,2]. \end{cases}$$

L'integrale da calcolare è

$$\int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}\,dt + \int_1^2 2t\sqrt{2}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^5 u^{\frac{1}{2}}\,du + 3\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 3\sqrt{2},$$

dove nel calcolo del primo integrale si è fatta la sostituzione $u = 1 + 4t^2$.

Esercizio 5. Una particella si muove su un piano su cui è presente una forza di attrito proporzionale alla velocità $F = -kv,\ k > 0$ secondo la legge

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{2}t \\ y = 4t - 3t^2 \end{cases}.$$

Si calcoli il lavoro compiuto dalla forza di attrito nell'intervallo di tempo $t = 0,\ t = 4$.

Svolgimento.

La velocità della particella segue la legge

$$\begin{cases} x' = 3\sqrt{2} \\ y' = 4 - 6t \end{cases}.$$

La forza che agisce sulla particella ha dunque per componenti le funzioni $-3\sqrt{2}k$ e $-(4-6t)k$. Il lavoro compiuto si calcola allora integrando

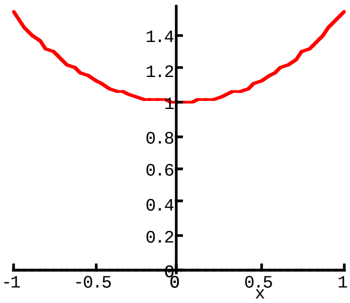
$$L = \int_0^4 \langle(-3\sqrt{2}k, -(4-6t)k)^T, (3\sqrt{2}, (4-6t)^T\rangle dt = -2k\int_0^4 \big(18t^2 - 24t + 17\big)\,dt = -520k.$$

Esercizio 6. Si calcoli il momento di inerzia rispetto all'asse z di un filo sospeso avente la forma di un arco di catenaria, di equazione $z = \cosh x$, per $|x| \le 1$.

Svolgimento.

Il momento di inerzia di un corpo C rispetto all'asse z è $I_z = \int_C (x^2 + y^2)\, dv$ dove dv è l'elemento di volume del corpo.

Nel nostro caso il corpo è filiforme e l'elemento di volume diventa elemento di lunghezza d'arco; inoltre la curva giace sul piano $y = 0$.



L'integrale da calcolare diventa quindi

$$\int_\gamma x^2\, ds \qquad \text{dove} \qquad \gamma(t) = (t, \cosh t)^T \qquad \text{per} \qquad t \in [-1, 1].$$

Si ha $\gamma'(t) = (1, \sinh t)^T$.

Calcoliamo l'integrale integrando successivamente per parti; si ottiene

$$\int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{1 + \sinh^2 t}\, dt = \int_{-1}^{1} t^2 \cosh t\, dt = [t^2 \sinh t]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2t \sinh t\, dt =$$

$$= \sinh 1 - \sinh(-1) - [2t \cosh t]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2 \cosh t\, dt =$$

$$= 2 \sinh 1 - 2\cosh 1 - 2\cosh(-1) + 2[\sinh t]_{-1}^{1} = 6 \sinh 1 - 4 \cosh 1.$$